# Instrumentos matemáticos computacionales

***Luis Moreno Armella***
CINVESTAV – IPN, México

## Introducción

Cuando examinamos los textos clásicos de las matemáticas griegas, nos resultan tan familiares que por ello no nos sorprende la expresión de Littlewood quien se refería a los matemáticos griegos como *fellows* de otra universidad, estableciendo así una comparación con los matemáticos de Cambridge.

El rasgo metodológico principal de esos textos es la *demostración*. La coronación de esa concepción matemática está constituida por *Los Elementos* de Euclides. Ha sido tal el éxito de esta manera de concebir la disciplina, que solemos olvidar las tensiones que surgieron en el interior de la comunidad matemática en diferentes momentos históricos. Por ejemplo, Arquímedes, considerado como el mayor de los matemáticos griegos, formuló su punto de vista en los siguientes términos:

> *Mediante el método mecánico logré entender ciertos resultados, aunque posteriormente tuviesen que ser demostrados geométricamente ya que la investigación mediante el método mecánico no proveía las demostraciones. <u>Pero es mucho más fácil poder dar una demostración de una situación, después de haberla comprendido mediante el mencionado método que intentar demostrarla sin ningún conocimiento previo.</u> Es debido a estas razones por las que, sobre los teoremas sobre volumen de un cono y una pirámide... demostrados originalmente por Eudoxio, hay que dar un crédito considerable a Demócrito, quien los enunció por primera vez aunque sin demostración alguna de ellos. (Subrayado nuestro)*

En este texto Arquímedes reconoce las bondades de un equilibrio entre la demostración y los *experimentos matemáticos* que nos permiten reconocer *hechos matemáticos*.

Refiriéndose al método mecánico, en su *Vida de Marcelo,* Plutarco comenta que Platón reaccionó con indignación al conocer el de Eudoxio (precursor del método mecánico de Arquímedes) porque representaba *una corrupción de la geometría* (Peitgen et al. 1992). En efecto, en lugar de razonar a partir de los objetos inmateriales, productos del intelecto puro, (i.e. de los objetos conceptuales de las matemáticas) se apoyaba en objetos materiales y en la percepción sensorial de los mismos.

Me he querido referir a este pluralismo epistemológico de la matemática griega, que puede apreciarse en las posiciones tan divergentes de Arquímedes y de Platón, para establecer una analogía con un tema de actualidad y de la mayor importancia para la educación matemática: *el papel de las herramientas informáticas en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas*.

Las posiciones tan divergentes que pueden observarse, responden, sin duda, a concepciones más o menos explícitas sobre la cognición y sobre las matemáticas mismas. Hay una tendencia que supone que las matemáticas son resultado de un intelecto *puro*, sin relación con alguna forma de tecnología.

Nuestro propósito en este escrito consiste en analizar este problema desde perspectivas que han resultado fructíferas en la investigación actual. La primera de éstas trata aspectos centrales de la *mediación instrumental* idea tematizada originalmente, desde un punto de vista psicológico, por Vygotsky (Kozulin, 1994). La segunda se refiere a la *ejecutabilidad* de las representaciones computacionales. Finalmente, trataremos un aspecto importante del trabajo con las herramientas computacionales, a saber, su transformación en *instrumentos* matemáticos (Rabardel, 1995).

Con relación a estas herramientas, Balacheff & Kaput (1996), han señalado que su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al hecho que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material. Por ejemplo, podemos trazar una parábola (dibujada por el punto *Q*) al desplazar el punto *P* sobre la recta *d* (ver figura 1).

Una vez construida la cónica, para quien ha operado el medio ambiente geométrico, la existencia ha dejado de ser virtual: el desarrollo constructivo no ha ocurrido en la imaginación del operador sino sobre la pantalla, aunque siempre, bajo el control de las reglas de la geometría, implícitas en el medio ambiente.

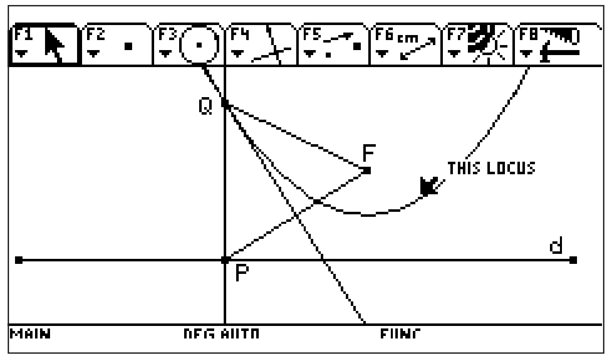


*Figura 1*

*Las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático.*

Debido a que los objetos sobre la pantalla son producidos y controlados desde el *universo interno* de la herramienta computacional —en términos informales podemos decir que el universo interno equivale a la matemática instalada en el procesador central de la calculadora—, podremos afirmar que estos objetos sobre la pantalla son *modelos manipulables de objetos matemáticos*.

Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la *exploración* y la *sistematicidad* ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación. Además, la exploración respeta explícitamente las reglas sintácticas del medio ambiente. Los sistemas de representación permiten instalar aspectos de nuestro pensamiento en un medio estable y ejecutable — en el caso de las computadoras. Estos medios llegan a ser parte integral de nuestros recursos intelectuales y expresivos. Permiten, además, generar una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas y traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud.

## La mediación instrumental

En la introducción a su libro *Oralidad y Escritura,* W. Ong (1999, p.11) afirma:

> *Muchas de las características que hemos dado por sentadas en el pensamiento dentro de la ciencia... se originaron debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana.*

La afirmación de Ong es de la mayor importancia. Toca un punto muy sensible con relación a las estructuras cognitivas, a saber, la influencia que tienen los instrumentos de mediación en la arquitectura de la mente humana. Por ejemplo, la escritura ha sido responsable de cambios profundos en la organización funcional de la memoria. Contar con un campo externo, como son los registros escritos, cambia eventualmente las funciones de la memoria biológica. Los registros externos se tornan elementos de reflexión por parte de quien los produce, pero también son sujeto de crítica por parte de otros. De esta manera, la escritura funciona como un mecanismo de socialización del conocimiento. Estos rasgos que en un comienzo son explícitos, con el paso del tiempo ganan en naturalidad y terminan volviéndose invisibles para las generaciones posteriores para las que aquellos medios son parte de su entorno. Esto explica el rasgo de invisibilidad compartido por todas las tecnologías. De manera que, en determinado momento histórico, una tecnología puede tener un impacto decisivo sobre la naturaleza de una disciplina y sobre los mecanismos cognitivos de la sociedad, sin que tales efectos sean posteriormente reconocidos como producto de esa tecnología. Por ejemplo, se puede llegar a creer que existe una actividad matemática pura, al margen de los sistemas matemáticos de representación. Es decir, al margen de la tecnología de la escritura.

De cara a los fenómenos de la invisibilidad, digamos que *no hay actividad cognitiva al margen de la mediación instrumental.* Ejemplos que sustancien tal afirmación pueden traerse de diversos campos disciplinarios. Pensemos en un instrumento musical un piano, digamos. El pianista ha necesitado de un esfuerzo intenso y prolongado para aprender a tocar ese instrumento. Su conocimiento no es independiente del instrumento. Uno no va a escuchar cantar al pianista: va a escucharlo tocar el piano y a valorar en términos estéticos la naturaleza simbiótica de la relación pianista-piano.

En el desarrollo de las ciencias, digamos la astronomía, por ejemplo, no podemos separar la construcción de los cuerpos conceptuales y las diferentes versiones de telescopio que han estado a disposición de los astrónomos. La simbiosis entre el conocimiento generado y los instrumentos es total.

Las herramientas, como instrumentos de mediación, han sido desarrolladas en distintos medios culturales y en diversos periodos históricos. *Son parte integral de las actividades humanas*.

Este enfoque sobre la actividad cognitiva ha recibido una atención creciente en los últimos años debido, en parte, a la presencia de las herramientas computacionales en la educación. Allí es necesario entenderlos como herramientas de mediación de las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje.

## Representaciones ejecutables

Podemos imaginar los sistemas de representación como herramientas de mediación. En sus versiones informáticas, la forma general de representación tiene una característica central: es *ejecutable*. Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en un entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras (*dragging*) conservando relaciones estructurales de las mismas, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones informáticas, que contribuye al realismo de estos objetos geométricos.

Veamos otro ejemplo para sustanciar las observaciones sobre ejecutabilidad de las representaciones que hemos desarrollado líneas arriba. Consideremos la suma (parcial) de la serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$$

que de acuerdo a la sintaxis de la TI-92, se escribe así:

$$\sum(1/\, n,\ n,\ 1,\ 100)$$

Una vez introducida la expresión a la calculadora, queda bajo el control del universo interno de la misma. Al pulsar ENTER, *la calculadora efectúa la suma* (el resultado aparece a la derecha en la pantalla de la calculadora). Esta acción (realizar la suma) es un acto cognitivo exteriorizado: ya no se realiza en la mente del estudiante o del profesor sino que lo realiza la calculadora (figura 2).

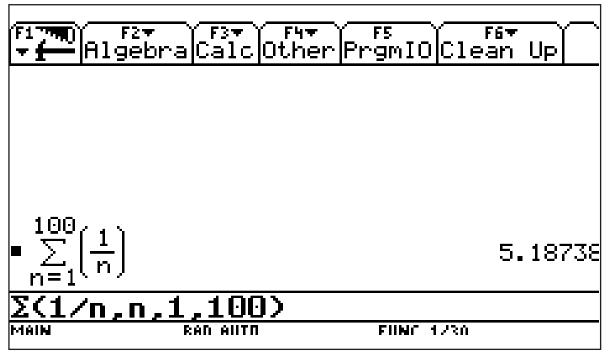


*Figura 2*

Un ejemplo más: usar el corrector de ortografía para revisar un texto. Esta es una función que anteriormente estaba reservada a los seres humanos. La máquina no sólo registra el pensamiento del escritor sino que *procesa la información* que queda registrada en ese medio de representación externa. Eso mismo ocurre cuando uno efectúa una operación aritmética con una calculadora, como acabamos de ver, o cuando se usa la agenda electrónica para recuperar un número telefónico.

De modo que al usar una computadora, una persona no sólo tiene a su disposición un espacio de representación externa (como un cuaderno) sino la posibilidad de procesar esa información *de cierta manera* debido a la ejecutabilidad del sistema de representación que le suministra la máquina.

La mediación instrumental comienza desde el momento en que podemos re-definir los objetos matemáticos en términos de las construcciones ejecutables. No sólo hay representaciones ejecutables sino también *construcciones ejecutables*—las que se hacen con Cabri, por ejemplo.

## De la amplificación a la reorganización conceptual

Debe enfatizarse que nuestro interés reside en la construcción del conocimiento matemático *en la escuela*. Esto es importante porque implica considerar las características particulares de esta forma de (re)construcción.

Frente a la calculadora, estamos ante dos posibilidades:

*i.* Entenderla como herramienta de *amplificación*

*ii.* Entenderla como herramienta de *re-organización cognitiva*.

En realidad, como veremos más adelante, estas posibilidades constituyen las dos etapas de un mismo proceso: Es *inevitable* que al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una *nueva actividad matemática* que, a su vez, genere una re-organización del conocimiento de los estudiantes. Debemos apresurarnos a decir que, sin embargo, el paso de (i) a (ii) no es automático y es más bien lento y complejo. Por esto, tiene sentido desde una perspectiva curricular, examinar a fondo el papel de la calculadora como instrumento de amplificación dentro de un currículo establecido.

La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de re-organización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto. Se abre entonces, la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo.

La reorganización no puede separarse de la amplificación. Son las dos caras de una moneda. A este respecto Dörfler (1993, p. 165) ha señalado que:

> *"Si la cognición se ve como una propiedad del individuo entonces la metáfora de la amplificación es altamente sugestiva... pues son nuestras capacidades cognitivas las que se amplían sin sufrir cambios cualitativos.*
>
> *Pero si vemos la cognición como un sistema funcional que comprende al individuo y todo su entorno físico y social... se abre la posibilidad de reconocer que las nuevas herramientas tienen un impacto transformador profundo en la cognición...".*

La reflexión en torno a los procesos de amplificación y reorganización también puede darse desde la perspectiva de la transición de herramienta a instrumento matemático que sufren las computadoras y calculadoras (Rabardel, 1995).

## De las herramientas a los instrumentos matemáticos

Cuando un estudiante se auxilia de una calculadora para realizar ciertos cálculos dentro de un problema cuya solución ya ha encontrado, esa calculadora puede interpretarse como un auxiliar de su cognición. *En ese caso diremos que la calculadora es una herramienta* pues su auxilio es complementario al tren de pensamiento del estudiante. La herramienta no modifica, sino que complementa el pensamiento del estudiante. Podría decirse que la calculadora es una herramienta cuando genera tan sólo efectos de amplificación.

Por otra parte, es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas, en cambios a nivel de la manera misma como se plantea el problema. *En otras palabras, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta*. Como cuando ya no podemos distinguir entre el pianista y el piano a la hora de la ejecución. El piano *forma parte* del pianista. La herramienta se ha tornado un instrumento. Cuando hablamos de las calculadoras, diremos que *la calculadora se ha tornado un instrumento matemático*. Es decir, cuando tiene efectos de reorganización conceptual. Cuando la herramienta se torne instrumento, estaremos ante los efectos estructurantes de la herramienta sobre la acción.

Algunos autores se han preocupado por caracterizar el origen de esa transformación. Es decir, se han interesado por la **génesis instrumental** de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995).

En dicha génesis se combinan dos procesos:

i) El sujeto se adapta a la herramienta.

ii) El sujeto adapta la herramienta a sí mismo.

Estos procesos ocurren mediante la producción de **esquemas de uso,** orientados a las acciones directamente vinculadas a la herramienta. Estas acciones del estudiante están condicionadas por la naturaleza de la herramienta misma.

El uso sostenido de la herramienta estabiliza los esquemas de uso. Dichos esquemas permiten atribuir un significado a los objetos (matemáticos) en función de la orientación de la actividad y de las tareas a desarrollar. A partir de allí, el empleo de las herramientas (ahora instrumentos) queda controlado por los esquemas.

## Referencias


**Dorfler, W.** (1993). *Computer Use and Views of the Mind*. En Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, Keitel, C. & Ruthven, K. (eds), Springer-Verlag, Nato Asi Series, 121.

**Balacheff, N., Kaput, J.**(1996). *Computer-Based Learning Environment in Mathematics*. En Bishop, A.J. *et al*, *International Handbook of Mathematical Education*, 469-501.

**Kozulin, A.** (1994). *La Psicología de Vygotsky*. Alianza Editorial, Madrid.

**Moreno, L.** (2001). *Cognición, Mediación y Tecnología*. Avance y Perspectiva, vol. 20, pp. 65-68.

**Ong, W.** (1999). *Oralidad y Escritura, Tecnologías de la Palabra*. Fondo de Cultura Económica, México.

**Peitgen *et al***. (1992). *Fractals for the Classroom*, vol. 1 (Introducción de B. Mandelbrot). Springer-Verlag & NCTM.

**Rabardel, P.** (1995). *Les Hommes et les Technologies*. Armand Colin, París.

# Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización

***Luis Moreno Armella***
CINVESTAV – IPN, México

## La didáctica de la matemática como disciplina emergente: de lo adquirido a lo construido

A grandes rasgos puede decirse que los inicios de la *investigación* en esta disciplina estuvieron centrados en indagar cómo entendían los estudiantes los conceptos matemáticos. De allí se desprendió una larga serie de publicaciones sobre los supuestos *errores de comprensión* de aquellos estudiantes. Como consecuencia de este enfoque, se consideró prioritario el diseño de estrategias de aprendizaje que permitieran superar las dificultades *atribuibles al método de enseñanza*.

A este acercamiento subyacen varias concepciones sobre el conocimiento y, en particular, sobre el conocimiento matemático. Por ejemplo, que el significado de un enunciado es fijo, que para que el estudiante lo capte, bastaría con saberlo transmitir. Esta *transparencia* del conocimiento corresponde, a lo que llamamos una *concepción realista* del mismo. Una muestra de la fragilidad de esta posición frente a los problemas de la didáctica de las matemáticas, viene dada por la comprobación que los profesores hacen cotidianamente: las formas de conocimiento que desarrollan los estudiantes no coincide necesariamente con el conocimiento enseñado. Por ejemplo: los estudiantes inventan resultados que luego aplican para resolver los problemas planteados en un examen. ¿De dónde vienen esas formas extrañas de interpretar lo que el profesor se ha esforzado en explicar con toda la claridad a su alcance?

La toma de conciencia sobre estos problemas fue haciendo evidente que había una realidad del conocimiento que no quedaba develada mediante los tests escritos. Las respuestas, aparentemente sin sentido, que se producían con frecuencia, no sólo eran interpretables como errores de los estudiantes, como falta de comprensión de cara a las explicaciones del profesor, sino que también podían ser vistas como manifestaciones de su manera de comprender. Es decir, las respuestas erróneas insinuaban la existencia de unas formas de comprensión movilizadas por las preguntas, que *no coincidían* con las *oficiales*.

De esta forma se fue estableciendo la certeza de que había una realidad del conocimiento que no quedaba develada mediante los tests escritos. Entonces, fue ganando terreno el movimiento constructivista que encontró una base de sustentación formidable en las tesis de la escuela piagetiana. Por ejemplo, en la tesis:

> *el conocimiento no es resultado ni de la sola actividad del sujeto, ni tampoco de la sola presencia del objeto de conocimiento. El conocimiento surge de la interacción del sujeto cognoscente y el objeto de su conocimiento. Ellos constituyen una pareja dialéctica indisociable.*

A partir de este reconocimiento, la disciplina fue delineando más finamente su objeto de estudio y, con ello, las metodologías de investigación.

Para ilustrar algunos aspectos de los nuevos acercamientos que podemos tener a los problemas de la didáctica, vamos a estudiar diversas situaciones de la constitución de la geometría y, posteriormente, describiremos una estrategia posible de reconstrucción de este conocimiento usando la computadora como un instrumento para lograr una experiencia cognitiva necesaria para acceder a la comprensión de esta forma de geometría.

## La geometría: un problema del conocimiento

Los pensadores griegos ejercitaron una profunda voluntad de racionalización frente a la diversidad de los fenómenos naturales. Erigieron *modelos y teorías* (pensemos en los vastos edificios teóricos de la astronomía y las matemáticas) como los mediadores entre la realidad externa y su intelecto. Todas estas ideas nos hablan de una preocupación por *modelar de maneras estructurales y matemáticas las observaciones*. No podemos dejar de mencionar a este respecto una concepción expresada muchos siglos después, por Galileo, que pone de manifiesto esta suerte de alma numérica del mundo:

> *La naturaleza está escrita en ese gran libro que tenemos abierto siempre ante nuestros ojos, pero no podemos entenderla si primero no aprendemos el lenguaje en que está escrita. El libro está escrito en lenguaje matemático y sus símbolos son los triángulos, los círculos y otras figuras sin cuya ayuda es imposible entender una sola palabra; sin la cual caminamos a ciegas por un oscuro laberinto (Galileo, El Ensayador, 1610).*

La realidad profunda es matemática. Para Galileo, el experimento era la vía para acceder a ese conocimiento. Digamos de inmediato que la experimentación es una característica de la ciencia que estuvo ausente del método de indagación de los griegos, que era esencialmente especulativo. Atribuyeron a la geometría la propiedad de ser una representación fiel del espacio físico.

Por ello, cuando sus herederos (desde entonces hasta el siglo XIX) vieron cuestionada la geometría euclidiana en términos de su adecuación al espacio físico, no entendieron de inmediato que se hallaban a las puertas de un nuevo modo de pensar en matemáticas: pensar en términos de estructuras que proporcionan modelos de situaciones físicas sin que por ello pueda hablarse de una correspondencia estructural (un isomorfismo) entre el modelo y la realidad modelada. Es, más bien, el modelo el que suministra la estructura matemática a *la realidad* observada.

Los resultados para el desarrollo y status epistemológico, de las matemáticas fueron profundos: la geometría no era ya concebida como un retrato del espacio físico. A lo más que podía aspirar era a ser concebida como organización de la experiencia que el geómetra desarrollaba en sus tratos con el espacio. Hay aquí una lección de importancia nada desdeñable desde el punto de vista del conocimiento: *la experiencia no provenía de la sola confrontación del mundo exterior sino, de manera central, de la actividad reflexiva que tomaba como base aquella confrontación*.

Históricamente, este es uno de los momentos estelares en que los científicos llegan por sus propios rumbos al entendimiento de la naturaleza constructiva del conocimiento.

## Las ideas de Poincaré

Para Poincaré, quien comprendió la fuerza de este modo de pensar, era comprensible que los modelos no podían desarrollarse al margen de aquellas experiencias, pero las rebasaban ampliamente debido a que, las acciones en el plano de la representación, superan a las acciones realizadas en el espacio intuitivo. Imaginó entonces un mundo hipotético cuyas leyes físicas produjeran como líneas *rectas* a los arcos de circunferencia ortogonales a una frontera circular fija. Los habitantes de este mundo verían entonces como rectas aquellas circunferencias, puesto que les servían para medir la distancia más corta entre dos puntos. Su experiencia sería así, una experiencia no-euclidiana.

Es difícil exagerar la importancia de las ideas de Poincaré: hicieron evidente que la matemática no estudia el mundo *como es* (lo que pertenece al dominio de la metafísica) sino *como es posible,* para nosotros, concebirlo a partir de la interacción de nuestra cognición y de nuestra experiencia.

## Geometría y modelos computacionales

Si bien el impacto de las calculadoras y computadoras sobre las prácticas cotidianas no ha sido tan fuerte como se esperaba desde hace ya más de dos décadas, *el impacto epistemológico* ha sido mayor que lo previsible en ese entonces (Balacheff & Kaput, 1996). Esto se debe fundamentalmente al *proceso de reificación* de los objetos matemáticos y a las relaciones entre ellos que el estudiante puede activar en los entornos interactivos computacionales. Lo anterior permite una forma de actividad mucho más directa que la que era posible anteriormente. Este nuevo *realismo matemático* hace indispensable la extensión de la *transposición didáctica* a los contextos computacionales dando lugar a una *transposición informática* (Balacheff, 1994).

Los nuevos entornos promueven una transformación a nivel epistemológico de la experiencia matemática del estudiante.

Las situaciones de orden cognitivo y epistemológico a que nos hemos referido, encuentran como vehículos de expresión a los llamados *micromundos computacionales* (Balacheff & Kaput, 1996). En términos más precisos, podemos decir que un micromundo está compuesto de:

i) *Un conjunto de objetos primitivos y operaciones que se realizan sobre estos objetos* que permite la operación formal del micromundo.

ii) *Un dominio fenomenológico,* que relaciona los objetos y las operaciones con los *fenómenos que podemos apreciar a nivel de la pantalla*. Este dominio determina el tipo de retroalimentación que se produce como consecuencia de las acciones y decisiones que toma el estudiante durante la exploración.

Puesto que no están predeterminadas las acciones del estudiante, él podrá explorar la estructura de los objetos, relaciones y registros representacionales que le suministra el micromundo. Podrá incluso, generar nuevos *objetos complejos* a partir de los objetos primitivos originales. Desde esta perspectiva, podemos decir que el micromundo *evoluciona* a medida que crece el conocimiento del estudiante.

## Cabri: un mundo geométrico nuevo

Señalaremos mediante un ejemplo, algunos de los problemas cognitivos que los nuevos recursos tecnológicos hacen explícitos: CABRI- GÉOMÈTRE. En dicho entorno computacional, uno puede manipular directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el *arrastre* (*drag*) de ciertas partes de ellas. De hecho, una vez elaborada una figura geométrica, ella *reconoce* cuáles son las partes (de dicha figura) que pueden ser *arrastradas*. Es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura. Por ejemplo, en la figura 1, se puede arrastrar el punto *A* hasta hacerlo coincidir con *B*. Durante el proceso, las relaciones estructurales (el que la recta t esté determinada por los puntos *A* y *B*, por ejemplo) no se alteran. Podemos exhibir entonces que la aproximación hacia *B* transformará a dicha recta en una recta tangente. El lector haría bien en procesar estos ejemplos en su computadora o calculadora (TI-92) pues nada sustituye a la dinámica que podemos apreciar en la pantalla.

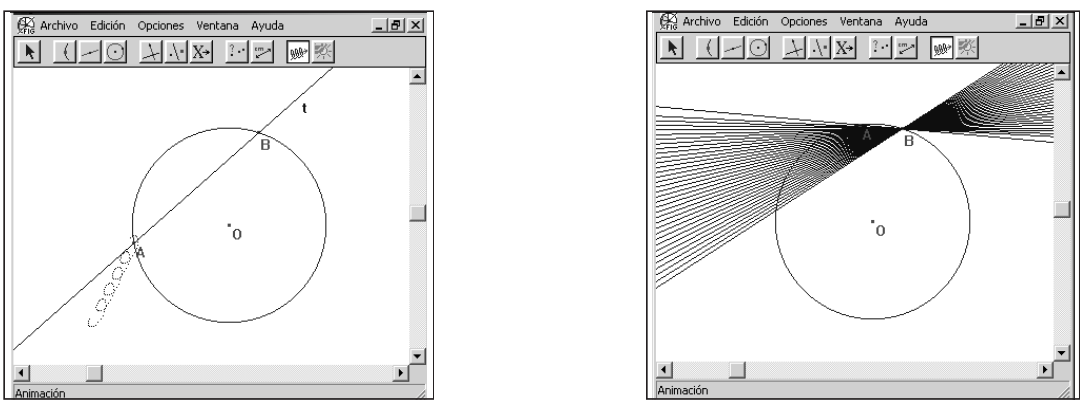


*Figura 1*

## La visualización en los entornos computacionales

La visualización ha sido un tema estudiado intensamente por la didáctica, desde el arribo de las máquinas con capacidades de graficación a los sistemas educativos.

Cuando se explora un procedimiento escrito en un lenguaje computacional, por ejemplo en Logo, el estudiante experimenta las relaciones entre el código simbólico propio del lenguaje computacional y los fenómenos visuales que aparecen en la pantalla de la computadora. Por esta vía se puede lograr la extensión de la relación que la geometría analítica establece entre una ecuación y una curva del plano. Allí se va de la ecuación a la curva determinada por dicha ecuación; ahora, podemos invertir la correspondencia e ir de la figura al código. Es interesante observar que las soluciones simbólicas que pueden corresponder a una figura dada, son diversas. Ello abre una oportunidad para el aprendizaje ya que los alumnos pueden comparar las distintas soluciones a un mismo problema (encontrar un código que corresponda a una figura dada) y llegan al entendimiento que los problemas de matemáticas no tienen solución única y que la decisión sobre la elección de la mejor solución deberá hacerse sobre criterios que pueden discutirse en el salón de clases. La manipulación del entorno geométrico permite la ampliación de la experiencia posible del estudiante. Dado el control formal del entorno, las experiencias desarrolladas dentro del micromundo pueden considerarse como genuinas experiencias geométricas.

La visualización y las representaciones externas permiten atender otro problema medular del aprendizaje y de la  enseñanza de las matemáticas. Nos referimos al problema de la validación de los enunciados matemáticos. Por ejemplo, consideremos la situación: se tiene un triángulo equilátero y se toma un punto cualquiera de su interior y desde allí se trazan las alturas a los lados del triángulo (ver figura 2).

Se pide a los estudiantes que traten de determinar el valor numérico de la suma de las

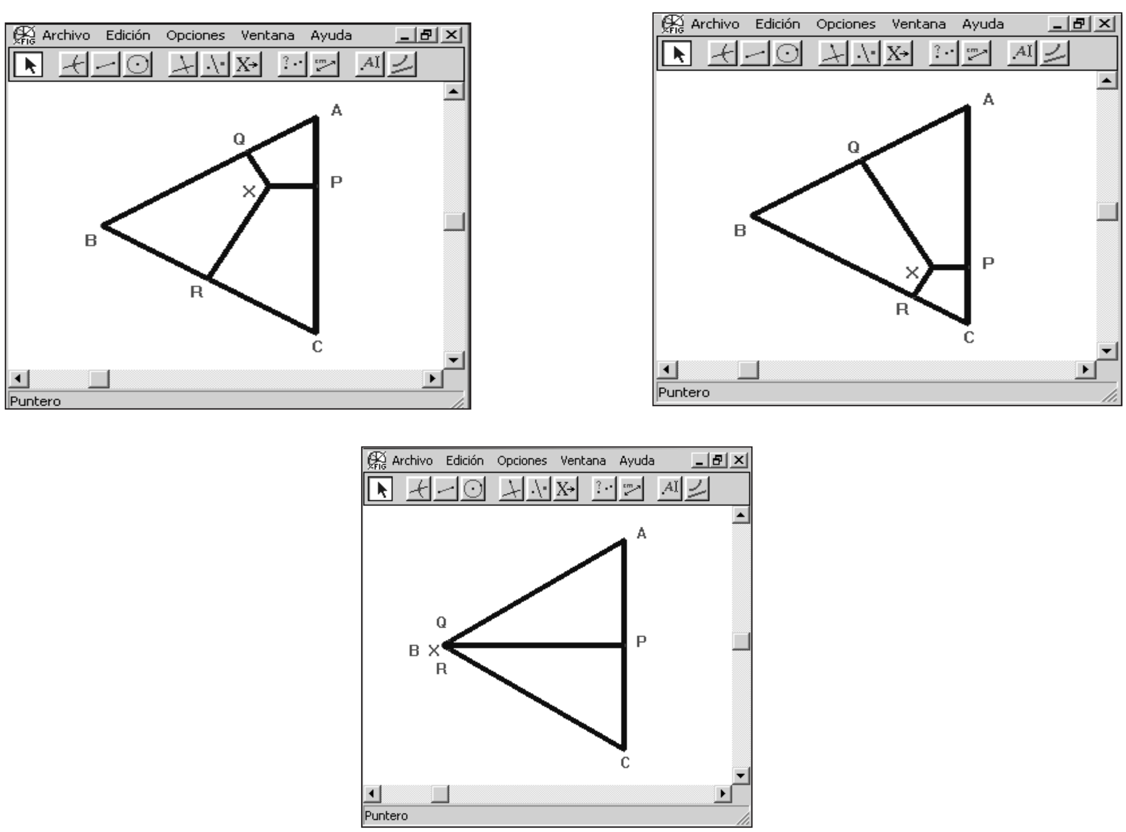


*Figura 2*

tres alturas sabiendo que dicha suma es independiente de la elección del punto interior.

En CABRI GÉOMÈTRE, los estudiantes tienen la posibilidad de mover (*drag*) el punto en el interior del triángulo preservando, como ya hemos dicho, las relaciones estructurales de la construcción original. El código interno del CABRI GÉOMÈTRE mantiene dichas relaciones. Entonces, bajo esta hipótesis, podemos manipular las construcciones geométricas seguros de que nuestras manipulaciones no cambiarán el dato numérico que estamos buscando. Las exploraciones de los estudiantes los llevan finalmente a la siguiente conclusión: si la suma de distancias no cambia, entonces podemos desplazar el punto interior a un vértice del triángulo y hacer evidente que la suma de las distancias coincide con la altura del triángulo.

Lo anterior es un ejemplo de que la manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el estudiante. Además, su conocimiento queda marcado por la relación dialéctica entre percepción y conceptualización durante la interacción con la interfase del sistema.

## Mediación y contextualidad

Una característica del funcionamiento mental, tanto a nivel del individuo como a nivel interindividual, es que ese funcionamiento está *mediado* por instrumentos materiales y por instrumentos simbólicos. Estos últimos incluyen, por ejemplo, las diversas formas de lenguajes sociales, diagramas, y sistemas matemáticos.

Una tesis central sobre la cognición desde la perspectiva social (Wertsch, 1993) es que la presencia de los instrumentos de mediación transforma de raíz la actividad cognitiva del estudiante determinando así la estructura de una nueva *acción instrumental*. La situación es análoga a la que se tiene ante la presencia de una herramienta material vinculada a un proceso técnico.

Los medios computacionales conducen a una redefinición de las fronteras entre la acción individual y la acción social. El estudiante, auxiliado de sus instrumentos computacionales, *construye una versión* del conocimiento. El conocimiento y el aprendizaje son, por su naturaleza, *situados*. Es decir, dependen en su construcción y en su interpretación, de la especificidad del contexto en el que surgen. Por lo tanto, para que el estudiante pueda utilizar el conocimiento construido, en otros contextos, hace falta la intervención permanente del profesor quien a través de sus propuestas conduce al estudiante a una nueva construcción (que se da a un nuevo nivel de abstracción) del esquema cognitivo que subyace a su construcción situada.

## Referencias

**Balacheff, N.** (1994), *Didactique et Intelligence Artificielle*, Recherches en Didactique des Mathematiques, 14, vol. 1-2, pp. 9-42.

**Balacheff, N., Kaput, J**. (1996), *Computer-Based Environments in Mathematics*, pp. 469-501. En International Handbook of Mathematical Education, Bishop, A. et al (eds.), Kluwer Academic Publishers.

**Wertsch, J.** (1993), *Voces de la Mente*, Visor Distribuciones, Madrid

# Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas

***Luis Moreno Armella***
CINVESTAV – IPN, México

## Introducción

Las calculadoras algebraicas actuales (TI-92 y TI-89) incorporan, además de los sistemas de representación numérico y gráfico, un sistema de manipulación algebraica. Dicho brevemente, esto significa que además de manipular números y graficar funciones, la calculadora puede manipular expresiones algebraicas: factorizar polinomios, derivar simbólicamente una función, hallar su antiderivada, hallar la expresión en fracciones parciales de una función racional, etc.

Una situación matemática puede ser estudiada desde cualquiera de estos puntos de vista y, lo que resulta aún más importante desde una perspectiva cognitiva, dicha situación puede estudiarse integradamente, *desde los tres puntos de vista* abriendo así la posibilidad a un establecimiento de nuevas relaciones entre las representaciones y, por ende, a una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la situación bajo estudio. No es extraño pues, que dichas calculadoras hayan resultado de interés para la comunidad de investigadores y educadores preocupados por entender el proceso de articulación:

currículo $\longleftrightarrow$ tecnologías informáticas,

y también el *proceso de producción de los objetos matemáticos* —ya no sólo en el sentido *clásico* que puede darse a este término—.

Son numerosos los trabajos que consideran las implicaciones posibles de las tecnologías informáticas, en particular de las calculadoras graficadoras, para el currículo. En términos generales, el punto de vista adoptado por los distintos autores consiste en estimar el *impacto sobre la práctica escolar* de dichos instrumentos. Es decir, su punto de vista consiste en imaginar (y evaluar) *el desarrollo del trabajo escolar* cuando las calculadoras se introducen en un currículum ya establecido[7].

En ese sentido el papel de los instrumentos va más allá que el de servir de *prótesis para la acción*. La presencia de tales instrumentos puede re-organizar todo el funcionamiento cognitivo (Wertsch, op.cit. p. 46). Por ejemplo, puede contribuir al re-diseño de las es-

[7] Es un punto de vista coherente con un *proyecto de desarrollo*: La calculadora como una herramienta de enseñanza.

trategias de resolución de problemas y a la re-conceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación. No olvidemos (Wertsch, 1991, p.29) que:

> *Todo aprendizaje está mediado por instrumentos.*

En otros términos, toda acción orientada a un aprendizaje, es una acción instrumental. Este *principio de mediación instrumental* puede ser reconocido a lo largo de las distintas dimensiones del desarrollo cognitivo. Por ejemplo a nivel filogenético: en la historia de los instrumentos de caza; en la historia de los instrumentos propios de las ciencias naturales (microscopios, telescopios, etc.); en la historia de los sistemas de escritura. En todos esos casos, el desarrollo del conocimiento ha sido inseparable de los instrumentos de mediación empleados. Considérense, por ejemplo, las profundas transformaciones en las sociedades como consecuencia del paso de las tradiciones orales a las escritas (Donald, 1991).

A nivel psicogenético mencionemos, a título de ejemplo, que la escritura en las sociedades modernas no puede disociarse de los instrumentos (tecnológicos) como papel, lápiz, etc. Estos son consustanciales al aprendizaje de la escritura. Con relación a la lectura, ¿cómo disociar su aprendizaje de los textos?

## La calculadora como amplificador y reorganizador del aprendizaje

Frente a la calculadora, estamos entonces ante dos posibilidades:

i. entenderla como herramienta de *amplificación*

ii. entenderla como herramienta de *re-organización cognitiva*.

En realidad, como veremos más adelante, estas posibilidades constituyen las dos etapas de un mismo proceso: Es *inevitable* que al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una *nueva actividad matemática* que, a su vez, genere una reorganización del conocimiento de los estudiantes. Debemos apresurarnos a decir que, sin embargo, el paso de *(i)* a *(ii)* no es automático y es más bien lento y complejo. Por esto, tiene sentido desde una perspectiva curricular, examinar a fondo el papel de la calculadora como instrumento de amplificación dentro de un currículum establecido[8].

Uno de los objetivos de la investigación en este terreno es tratar de entender cómo hay que realizar la implementación de la tecnología. Bien sabemos que la primera etapa puede implicar que tengamos que trabajar dentro del marco de un currículum establecido previamente. Pero las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de *erosionar* los currículos tradicionales. Aquí es donde la comprensión que alcancemos sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas informáticas, se torna necesaria.

La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de reorganización, sugiere pensar en un microscopio. Con

---

8 Esto ocurre dentro de un *proyecto de desarrollo*. El paso de *(i)* a *(ii)* conviene investigarlo dentro de un *proyecto de investigación*.

el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a un nivel de realidad novedoso. Se abre la posibilidad de estudiar algo nuevo y con ello, de acceder a un conocimiento nuevo.

La diferencia entre el impacto amplificador y el impacto reorganizador de las tecnologías puede apreciarse si distinguimos entre los efectos *mientras* se trabaja con la tecnología y los efectos que *resultan* de haber trabajado con la tecnología.

La reorganización no puede separarse de la amplificación. Son las dos caras de una moneda. A este respecto Dörfler (1993, p. 165) ha señalado que:

> *...enfatizar el efecto amplificador o el reorganizador, depende de nuestras concepciones sobre la cognición misma. Si la cognición se ve como una propiedad del individuo entonces la metáfora de la amplificación es altamente sugestiva... pues son nuestras capacidades cognitivas las que se amplían sin sufrir cambios cualitativos. Por otra parte, si vemos la cognición como un sistema funcional que comprende al individuo y todo su entorno físico y social... se abre la posibilidad de reconocer que las nuevas herramientas tienen un impacto transformador profundo en la cognición....*

## Un nuevo sistema de representación

Los instrumentos informáticos (calculadoras, computadoras...) tienen una característica que distingue a sus sistemas de representación de los sistemas escritos, a saber: *la posibilidad de procesar las representaciones*.

En cierto sentido, esta capacidad de procesamiento del sistema de representación equivale a una externalización de una función cognitiva. Conviene por tanto pensar en estas herramientas como parte de una *tecnología cognitiva*, pues ayudan a trascender las limitaciones de memoria y de cómputo, por ejemplo, características de la mente humana—aún cuando la veamos como el sistema funcional descrito por Dörfler.

En los textos de las décadas pasadas, era frecuente hallar ejemplos que involucraban cálculos con logaritmos (el logaritmo de 123456) y funciones trigonométricas (el coseno de 47°). Los libros traían al final una reproducción de las tablas de logaritmos y de las tabulaciones de las funciones trigonométricas (véase Granville, Smith y Mikesh, 1980). Dichas tablas funcionaban como amplificadores. La llegada de las calculadoras científicas las hizo obsoletas: prácticamente no volvieron a aparecer en los libros. Cuando se usan las tablas de logaritmos, debemos aprender términos tales como *característica*, *mantisa* de un número. Estos términos son importantes para aprender el uso de esa tecnología. Estos cálculos eran frecuentes en los cursos de trigonometría. En consecuencia, se dedicaba gran cantidad de tiempo a la adquisición de una destreza con la tabla de logaritmos. Pero, en el contexto de la época, estas destrezas eran valoradas en la escuela como *genuinas capacidades matemáticas*.

## Invisibilidad de las tecnologías

Las matemáticas, como toda otra actividad intelectual, están *formateadas* por las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo, las tecnologías se tornan *invisibles* y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas per se, independientes de aquella tecnología. Entonces surge la noción de una *actividad matemá-*

*tica pura* al margen de su entorno sociocultural. En nuestro ejemplo elemental, las destrezas con los cálculos logarítmicos se ven como independientes de la herramienta y son *confundidas* con capacidades matemáticas *puras*. Como si el sistema cognitivo estuviera blindado, como si fuera inmune a las herramientas *mediante* las cuales se despliega la actividad intelectual.

Cuando una nueva tecnología (Jones, 1996, p. 89) hace su aparición (y en consecuencia, no se ha hecho "invisible" todavía) es natural que su primer empleo sea como instrumento de refuerzo para realizar ciertos cálculos. Gradualmente vamos comprendiendo que el primer papel de esa tecnología es amplificar nuestro radio de acción. Pensemos, por ejemplo, la diferencia entre caminar y transportarse en bicicleta.

**Ejemplo**: Evaluar la integral de la función $f(x)=sen^3(x)$ entre 0 y $\pi$.

Utilizando la TI-92 obtenemos que el valor de dicha integral es:

$$\int (f(x), x, 0,\pi)=.000129$$

hasta seis decimales. Con papel y lápiz la solución exige una destreza técnica considerable (intente el lector resolver el problema). Pero el problema en cuestión puede tener a dicha integral como un subproblema (necesario para dar la respuesta a una pregunta principal). La calculadora sirve entonces como parte de la infraestructura que está a disposición del estudiante. Su meta principal no es calcular dicha integral: esta amplificación de sus capacidades de cálculo le permite al estudiante lograr la solución del problema principal, digamos, un problema de modelación.

Una vez que la tecnología se ha hecho invisible para nosotros, resulta (casi) imposible aceptar que esas destrezas técnicas no constituyan matemáticas genuinas. Aclaremos: hacerse *invisibles* para las tecnologías del papel y el lápiz, por ejemplo, significa que las personas involucradas en cálculos con papel y lápiz conciben su actividad matemática como *auxiliada* por el sistema de escritura pero independiente de tal sistema.

Las calculadoras con las cuatro operaciones aritméticas han servido para que no tengamos que realizar tediosas operaciones numéricas. Análogamente, las calculadoras científicas más avanzadas (las algebraicas, las que poseen capacidades de procesamiento simbólico) nos sirven para evitar los cálculos engorrosos de integrales, como en el ejemplo anterior. Pero no vemos el cálculo de estas integrales como parte esencial del pensamiento matemático.

## Una nueva relación alumno-tecnología

Si bien las tecnologías de papel y lápiz nos sirven para liberar la memoria, las tecnologías computacionales nos permiten ir más lejos: no sólo sirven para liberar la memoria (al funcionar como dispositivos de almacenamiento de la información) sino que además pueden realizar ciertas funciones cognitivas (que anteriormente eran privativas de las personas) como por ejemplo, factorizar un polinomio. Esto es muy importante: la capacidad de procesar matemáticamente información abre nuevas posibilidades para una nueva relación entre el estudiante y su calculadora. Tomemos como ejemplo el caso de la factorización. Supongamos que se quiere graficar una función polinómica como

$$y = 2x^3+5x^2-13x-30$$

Al tener la gráfica debemos poder extraer de allí información sustancial acerca de la función. Por ejemplo, conocer dónde intersecta la gráfica al eje de las abscisas. La calculadora suministra varias herramientas para obtener esta información de manera aproximada (pues algunas veces esto es todo a lo que podemos aspirar!) pero también es posible, en muchos casos, factorizar el polinomio. En nuestro ejemplo, utilizando la TI-92 y aplicando la herramienta `factor` obtenemos:

$$\texttt{factor}\ (2x^3+5x^2-13x-30) = (x+2)(x+3)(2x-5)$$

La expresión factorizada (a la derecha en la línea anterior) arroja de inmediato la información que se necesita para conocer las raíces de la ecuación respectiva.

Esto es un pequeño ejemplo de *asociación inteligente* entre el estudiante y la tecnología a su disposición.

| | **Cultura basada en la escritura** | **Cultura virtual** |
|---|---|---|
| Almacenamiento de información | Si | Si |
| Procesamiento de las representaciones | No | Si |
| Modelación, interpretación, etc. | No | No |

Todavía no entramos de lleno en la edad de la cultura virtual. Por ello, aunque son las capacidades cognitivas superiores (modelar, interpretar... que todavía son privativas del ser humano) las que más valoramos, en las instituciones escolares, seguimos enfatizando las destrezas computacionales sin reconocer que esas destrezas son propias de una *tecnología invisible* y no características de un pensamiento matemático profundo. De allí que las nuevas tecnologías, que todavía NO se han hecho *invisibles* y que permiten que ciertos cálculos se realicen pulsando una tecla (por ejemplo: extraer una raíz cuadrada) desafían nuestras concepciones tradicionales sobre lo que constituye la verdadera capacidad matemática.

Las tradiciones occidentales han tendido a concebir *la inteligencia como algo que reside enteramente en el individuo* (Kant es uno de los principales forjadores de esta tradición en el mundo moderno). Frente a una nueva etapa tecnológica que nos ha dado *sistemas de representación ejecutables*, esa concepción de inteligencia representa un obstáculo para imaginar nuevas formas de empleo de las nuevas tecnologías en nuestros sistemas educativos.

Por ejemplo, un estudiante dotado de una calculadora graficadora tiene el potencial de desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, sacando partido de las capacidades de procesamiento de graficación de su calculadora.

La sinergia que puede entonces ponerse en marcha, capacitaría al estudiante para trabajar a un nivel de complejidad matemática que puede ser totalmente inalcanzable sin dicha tecnología. Puesto en lenguaje de Vygotsky: una asociación *inteligente* del estudiante y su calculadora, potencia la ampliación de su *zona de desarrollo próximo.* (Wertsch). La *metáfora de la amplificación* describe la existencia de herramientas intelectuales que apoyan (asisten) el aprendizaje de nuevos materiales. Por ejemplo, la calculadora gráfica es una herramienta que amplifica la ZPD (zona de desarrollo próximo), pues desaloja de esa zona tareas tediosas de cálculos y deja espacio para funciones superiores de mayor demanda cognitiva.

Imaginando al *estudiante con su calculadora como un sistema* y aceptando que la actividad de este sistema es una forma legítima de actividad matemática, entonces la evaluación de lo que constituye *inteligencia matemática* debe incluir la evaluación de tal sistema.

Es crucial que los profesores comprendan estas ideas y contribuyan al florecimiento de esa sinergia entre el estudiante y la tecnología.

## Referencias

**Dorfler**, W. (1993), *Computer Use and Views of the Mind,* en Learning from Computers: mathematics Education and Technology, Keitel, C. & Ruthven, K. (eds), Nato Asi Series, 121. Berlin: Springer-Verlag,

**Donald**, M. (1992), *Origins of the Modern Mind*, Cambridge: Harvard University Press.

**Wertsch**, J, (1993), *Voces de la Mente*, España: Visor.