

# <h1>Desafío de límites: investigamos y resolvemos inecuaciones</h1>

Matemáticas | Álgebra | Aprendizaje Basado en Investigación

## Descripción

Este plan de aprendizaje está dirigido a estudiantes de segundo de secundaria y aborda las inecuaciones lineales con una variable mediante la metodología de Aprendizaje Basado en Investigación. Durante dos sesiones, los estudiantes analizarán situaciones cercanas a su vida, formularán preguntas, recogerán y organizarán información, construirán representaciones y argumentarán sus conclusiones.

Las inecuaciones permiten describir situaciones en las que una cantidad puede ser mayor, menor, como mínimo o como máximo que otra. Por ejemplo, sirven para determinar cuánto dinero se necesita para comprar varios productos, cuántos minutos pueden utilizarse en una actividad, qué cantidad de ingredientes se requiere o cuál es la edad mínima para participar en un evento. A diferencia de una ecuación, una inecuación generalmente tiene un conjunto de soluciones.

Los estudiantes aprenderán a reconocer el significado de los signos  $>$ ,  $\leq$  y  $\geq$ ; traducir situaciones cotidianas a expresiones algebraicas; resolver inecuaciones aplicando propiedades de la igualdad y la desigualdad; representar las soluciones en la recta numérica; comprobar sus resultados y comunicar conclusiones usando lenguaje matemático. El docente actuará como mediador, formulando preguntas y proporcionando retroalimentación, mientras los estudiantes investigan, contrastan procedimientos y elaboran una propuesta final basada en evidencias.

## Objetivos de Aprendizaje

- **Interpretar** los signos de desigualdad y relacionarlos con expresiones verbales y representaciones en la recta numérica.
- **Modelar** situaciones cotidianas mediante inecuaciones lineales con una variable.
- **Resolver** inecuaciones lineales aplicando operaciones equivalentes y justificando el cambio de sentido del signo al multiplicar o dividir por un número negativo.
- **Representar** los conjuntos solución mediante intervalos sencillos y rectas numéricas, verificando algunos valores.
- **Argumentar** conclusiones matemáticas a partir de evidencias obtenidas en una investigación grupal.

## Recursos Necesarios

- Pizarra, plumones de cuatro colores, borrador y cinta adhesiva.
- Una recta numérica grande elaborada en papelote o dibujada en el piso.
- Tarjetas con signos ( $,$   $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ), frases cotidianas, números y situaciones problemáticas.

- Cuatro papelotes por aula, hojas A4, fichas de investigación, hojas cuadriculadas y notas adhesivas.
- Reglas, lápices, colores, tijeras y marcadores.
- Calculadoras básicas, una por pareja si están disponibles.
- Proyector o televisor y un video breve de 3 a 5 minutos sobre desigualdades en situaciones cotidianas.
- Computadoras o tabletas con GeoGebra Classic, opcional para representar soluciones.
- Ficha impresa con problemas de presupuesto, tiempo, capacidad y edad mínima.
- Rúbrica de investigación, lista de cotejo, ficha de autoevaluación y ticket de salida.

## Requisitos Previos

- Reconocer números enteros, positivos y negativos, y ubicarlos en la recta numérica.
- Realizar operaciones básicas con números enteros y aplicar la jerarquía de operaciones.
- Comprender el uso de letras para representar cantidades desconocidas.
- Resolver ecuaciones lineales sencillas como  $x + 5 = 12$  y  $3x = 18$ .
- Interpretar expresiones como “más que”, “menos que”, “como mínimo”, “como máximo”, “no supera” y “por lo menos”.
- Trabajar colaborativamente, registrar procedimientos y explicar oralmente una conclusión.

## Actividades

### Sesión 1: De las situaciones reales al lenguaje de las inecuaciones

#### Fase de Inicio

**Tiempo estimado: 35 minutos.**

**Propósito de la sesión:** Activar los conocimientos previos y descubrir que muchas situaciones cotidianas no tienen una única respuesta, sino un conjunto de posibilidades que puede expresarse con una inecuación.

#### Apertura y activación de conocimientos previos: 10 minutos

**Docente:** Escribe en la pizarra: “Tengo 20 soles y quiero comprar cuadernos que cuestan 6 soles cada uno. ¿Cuántos puedo comprar como máximo?”. Pide que cada estudiante responda individualmente y explique cómo pensó. Luego pregunta: “¿La respuesta puede ser 2? ¿Puede ser 4? ¿Qué significa ‘como máximo?’”.

- **Estudiantes:** Resuelven mentalmente o mediante una operación, escriben una respuesta y comparan sus ideas con un compañero.
- **Docente:** Recupera expresiones como “menor o igual que”, “no puede superar” y “hasta”. No corrige todavía todos los procedimientos; registra las ideas iniciales.

#### Motivación y enganche: 10 minutos

El docente presenta un video breve o una imagen sobre un parque de diversiones que indica: “Altura mínima: 1,40 m” y “Capacidad máxima: 30 personas”. Después formula el reto: **“¿Cómo podría una matemática ayudar a decidir quién puede ingresar y cuándo una actividad debe detenerse?”**

- **Estudiantes:** Identifican palabras que expresan límites y escriben dos ejemplos de su vida diaria en los que exista una cantidad mínima o máxima.
- **Docente:** Organiza las respuestas en dos columnas: “al menos” y “como máximo”. Introduce el término **inecuación** sin desarrollar todavía el procedimiento de resolución.

### **Contextualización y pregunta de investigación: 15 minutos**

El docente plantea la situación: “El consejo estudiantil dispone de 180 soles para preparar refrigerios. Cada refrigerio cuesta 7 soles y se deben reservar 25 soles para materiales. ¿Cuántos refrigerios pueden preparar?”. Presenta la pregunta de investigación: **“¿Cómo podemos representar, resolver y comprobar límites de cantidad usando inecuaciones?”**

- **Estudiantes:** Forman grupos de tres o cuatro, proponen qué datos necesitan, señalan la cantidad desconocida y escriben una primera representación con palabras, dibujos o símbolos.
- **Docente:** Explica que en las dos sesiones investigarán la pregunta mediante ejemplos, pruebas, representaciones y argumentos. Entrega roles: coordinador, registrador, verificador y portavoz.

**Transición:** El docente indica: “Ya identificamos límites en situaciones reales. Ahora investigaremos qué significan los signos y cómo se pueden representar en una recta numérica”.

### **Fase de Desarrollo**

**Tiempo estimado: 200 minutos.** La fase se desarrolla mediante exploración, formulación de conjeturas, comprobación y sistematización.

#### **Actividad 1. El laboratorio de los signos: 25 minutos**

**Objetivo específico:** Interpretar los signos de desigualdad y relacionarlos con frases y representaciones.

**Organización:** Grupos de tres o cuatro.

- **Docente:** Entrega tarjetas con los signos  $, >, \leq$  y  $\geq$ , números y frases. Dice: “Construyan una afirmación verdadera con cada signo. Después expliquen qué palabras indican el signo elegido”.
- **Estudiantes:** Forman expresiones como  $4 < 9$ ,  $12 \geq 12$  y  $7 \leq 10$ ; relacionan cada una con frases como “4 es menor que 9” o “12 es mayor o igual que 12”.
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué diferencia hay entre ‘menor que’ y ‘menor o igual que’? ¿Qué ocurre con el número que está en el límite?”.
- **Estudiantes:** Ubican los números en una recta numérica grande. Usan un punto abierto para  $<$  y  $>$  y un punto cerrado para  $\leq$  o  $\geq$ ; luego justifican la dirección de la flecha.

**Producto:** Tabla grupal con signo, frase, ejemplo y representación gráfica.

**Rol docente:** Observa el uso de los términos “límite” y “conjunto de valores”, corrige confusiones entre el número mayor y el signo abierto, y solicita explicaciones, no solo respuestas.

## **Actividad 2. Investigación con datos y traducción algebraica: 55 minutos**

**Objetivo específico:** Modelar situaciones cotidianas mediante inecuaciones lineales.

**Organización:** Grupos de cuatro.

- **Docente:** Entrega a cada grupo una ficha con cuatro situaciones: presupuesto para refrigerios, tiempo disponible para una actividad, capacidad de una sala y edad mínima para un juego.
- **Estudiantes:** Subrayan los datos, rodean la cantidad desconocida y clasifican cada situación como límite mínimo o máximo.
- **Docente:** Indica que completen la frase: “La cantidad desconocida debe ser...”. Luego pregunta: “¿Qué representa la variable? ¿Qué operación relaciona los datos? ¿Qué signo corresponde?”.
- **Estudiantes:** Elaboran una tabla con las columnas: situación, variable, expresión verbal, inecuación y razón de la elección del signo.
- **Docente:** Presenta como ejemplo guiado: “Una entrada cuesta 8 soles y tengo como máximo 40 soles. Si  $x$  es el número de entradas, la expresión es  $8x \leq 40$ ”. Solicita que los grupos comparen el ejemplo con sus casos, sin copiar automáticamente.
- **Estudiantes:** Intercambian su ficha con otro grupo y revisan si los datos, la variable y el signo son coherentes. Escriben una pregunta o sugerencia al grupo autor.

**Producto:** Ficha de modelación con cuatro inecuaciones justificadas.

**Preguntas guía:** “¿La cantidad puede ser decimal o debe ser entera?”, “¿La situación acepta el valor límite?”, “¿Qué significa  $x$  en el contexto?”.

**Transición:** “Ya sabemos escribir una inecuación. El siguiente reto es descubrir cómo encontrar todos sus valores posibles y no solo probar un número”.

## **Actividad 3. Descubrimos el procedimiento mediante balanzas: 55 minutos**

**Objetivo específico:** Resolver inecuaciones aplicando operaciones equivalentes y explicar el cambio de sentido al multiplicar o dividir por un número negativo.

**Organización:** Parejas y posterior puesta en común.

- **Docente:** Entrega una ficha con representaciones de balanzas y expresiones como  $x + 3 \geq 9$ ,  $2x + 1 \geq 7$  y  $-3x \geq 12$ . Dice: “Resuelvan primero sin memorizar reglas. Piensen qué operación mantiene la afirmación verdadera”.
- **Estudiantes:** Resuelven las dos primeras inecuaciones usando dibujos, fichas o pasos escritos. Comprueban un valor que cumpla y otro que no cumpla.
- **Docente:** Pregunta: “¿Qué hicieron para eliminar el 3? ¿Por qué podemos restar 3 en ambos lados? ¿La relación cambia si dividimos entre un número positivo?”.

- **Estudiantes:** Analizan el caso  $-3x \geq 12$  probando valores. Comparan, por ejemplo,  $x = -5$  y  $x = -3$ , y descubren que al dividir por  $-3$  se invierte el signo:  $x > -4$ .
- **Docente:** Formaliza la regla: al sumar o restar el mismo número se conserva el signo; al multiplicar o dividir por un número positivo también; al hacerlo por un número negativo, se invierte.
- **Estudiantes:** Elaboran un “semáforo de reglas”: verde para operaciones que conservan el signo, rojo para las que lo invierten y amarillo para las que requieren comprobar.

**Producto:** Procedimiento razonado de tres inecuaciones y semáforo de reglas.

#### Actividad 4. Recta numérica y verificación de soluciones: 50 minutos

**Objetivos específicos:** Representar conjuntos solución, verificarlos y comunicar su significado.

**Organización:** Individualmente, luego parejas.

- **Docente:** Entrega seis inecuaciones graduadas:  $x > 2$ ,  $x \leq -1$ ,  $3x \geq 12$ ,  $x - 4 \geq 2$ ,  $-2x \geq 6$  y  $5 - x \geq 1$ .
- **Estudiantes:** Resuelven, dibujan la recta numérica correspondiente y eligen dos valores que sí pertenecen y uno que no pertenece al conjunto solución.
- **Docente:** Pide que cada pareja use una calculadora o sustitución directa para comprobar una respuesta. Pregunta: “¿Qué valor está justo en el límite? ¿Se incluye o se excluye? ¿La flecha apunta hacia números mayores o menores?”.
- **Estudiantes:** Comparan sus representaciones con otra pareja y corrigen utilizando una lista de cotejo: signo correcto, procedimiento ordenado, punto abierto o cerrado, dirección de la flecha y verificación.
- **Docente:** Selecciona dos casos, uno con división positiva y otro con división negativa, para que los estudiantes expliquen la diferencia frente al grupo.

**Producto:** Hoja de soluciones representadas y comprobadas.

#### Diferenciación y transición: 15 minutos

- **Para quienes necesitan apoyo:** entregar una recta numérica parcialmente graduada, tarjetas de vocabulario, ejemplos paso a paso y una plantilla con preguntas: “¿Qué conozco?”, “¿Qué busco?”, “¿Qué operación deshace la operación?”. Permitir el uso de material concreto.
- **Para quienes terminan antes:** pedirles crear una situación real cuya solución sea  $x \geq 6$  y otra cuya solución sea  $x < 6$ ; después deberán explicar por qué el límite se incluye o no se incluye.
- **Docente:** Realiza una pausa de revisión y pide a cada grupo que responda oralmente: “¿Qué evidencia demuestra que nuestra solución es correcta?”.

**Transición:** “En la siguiente sesión usaremos lo aprendido para investigar una situación más completa, comparar estrategias y presentar una recomendación matemática”.

#### Fase de Cierre

**Tiempo estimado: 5 minutos.**

## Síntesis, retroalimentación y anticipo

- **Estudiantes:** Escriben en una nota adhesiva una idea que aprendieron y completan: “Si divido entre un número negativo, debo... porque...”.
- **Docente:** Lee algunas respuestas, aclara rápidamente errores frecuentes y recoge las notas para planificar la siguiente sesión.
- **Docente:** Anticipa: “Mañana investigaremos un problema de presupuesto y defenderemos una solución usando una inecuación, una recta numérica y una comprobación”.

## Sesión 2: Investigamos, argumentamos y tomamos decisiones con inecuaciones

### Fase de Inicio

**Tiempo estimado: 10 minutos.**

#### Apertura y conexión con la sesión anterior

**Docente:** Presenta dos respuestas anónimas de las notas adhesivas de la sesión anterior, una correcta y otra con un error en el cambio de signo. Pregunta: “¿Cuál respuesta es correcta y cómo lo sabemos?”.

- **Estudiantes:** Analizan las respuestas en parejas, prueban un valor y explican si la afirmación se mantiene verdadera.
- **Docente:** Comunica el objetivo: “Hoy resolverán una situación de investigación, compararán resultados y presentarán una recomendación sustentada en evidencias”.

**Pregunta detonadora:** “¿Basta con obtener  $x > 4$  o necesitamos explicar qué significa ese resultado en la situación real?”.

### Fase de Desarrollo

**Tiempo estimado: 225 minutos.** Los estudiantes aplicarán el ciclo de investigación: observar el problema, formular una pregunta, proponer una estrategia, resolver, comprobar, comunicar y evaluar la conclusión.

#### Actividad 5. Reto de investigación: ¿cuántos refrigerios podemos preparar?: 55 minutos

**Objetivos específicos:** Modelar y resolver una situación contextualizada, interpretando la solución en su contexto.

**Organización:** Grupos de cuatro.

**Situación para entregar impresa:** “Una sección tiene 180 soles para preparar refrigerios. Cada refrigerio cuesta 7 soles y se deben reservar 25 soles para comprar materiales. ¿Cuál es la cantidad máxima de refrigerios que se puede preparar? ¿Qué ocurre si el grupo desea preparar al menos 20 refrigerios?”.

- **Docente:** Solicita que los grupos formulen una pregunta investigable y una conjetura antes de realizar operaciones.
- **Estudiantes:** Definen  $x$  como el número de refrigerios, identifican que el dinero utilizado no puede superar 155 soles y escriben  $7x \leq 155$ .
- **Docente:** Pregunta: “¿Por qué se resta 25? ¿Por qué usamos  $\leq$  y no

- **Estudiantes:** Resuelven la inecuación, interpretan que  $x \leq 22,14$  y concluyen que, al tratarse de refrigerios completos, el máximo es 22.
- **Estudiantes:** Resuelven la segunda condición,  $x \geq 20$ , y determinan el conjunto de cantidades enteras posibles: 20, 21 y 22.
- **Docente:** Exige una comprobación del valor máximo y de un valor que no sea posible. También pide diferenciar la solución algebraica de la respuesta contextual.

**Producto:** Informe breve con datos, variable, inecuaciones, resolución, recta numérica, comprobaciones y conclusión.

## Actividad 6. Estaciones de investigación y contraste de estrategias: 60 minutos

**Objetivos específicos:** Resolver inecuaciones, representar soluciones y evaluar la coherencia de diferentes procedimientos.

**Organización:** Grupos de cuatro; rotación cada 15 minutos por cuatro estaciones.

- **Estación A, presupuesto:** “Cada cuaderno cuesta 6 soles y tienes como máximo 48 soles. ¿Cuántos cuadernos puedes comprar?”.
- **Estación B, tiempo:** “Para llegar a una reunión debes recorrer 12 minutos y todavía tienes como máximo 35 minutos disponibles. Si cada actividad previa dura 5 minutos, ¿cuántas actividades puedes realizar?”.
- **Estación C, edad:** “Un juego requiere tener al menos 13 años. Si  $x$  representa la edad, escribe y representa la solución en la recta numérica”.
- **Estación D, desafío de signo negativo:** “Resuelve  $-2x + 5 \geq 11$  y comprueba la respuesta con dos valores”.
- **Docente:** Explica que cada grupo debe dejar una solución visible y escribir una pregunta para el grupo siguiente: “¿Cómo comprobarías este resultado?”.
- **Estudiantes:** Resuelven, representan y revisan el trabajo anterior. Si encuentran un error, lo señalan con respeto, escriben la corrección y justifican el cambio.
- **Docente:** Observa especialmente la traducción de “al menos”, el tratamiento de cantidades enteras y la inversión del signo. Hace preguntas, pero evita entregar directamente el procedimiento.

**Producto:** Cuatro fichas de estación revisadas y un registro de correcciones.

## Actividad 7. Diseño de una recomendación para la comunidad escolar: 70 minutos

**Objetivos específicos:** Crear un modelo con inecuaciones y argumentar una decisión matemática basada en evidencias.

**Organización:** Grupos de cuatro.

**Consigna:** “Diseñen una propuesta para una actividad escolar usando al menos dos inecuaciones. Pueden elegir una campaña de reciclaje, una venta saludable, un torneo o una salida educativa”.

- **Docente:** Entrega una plantilla con los apartados: nombre del proyecto, situación, datos disponibles, variables, pregunta de investigación, inecuaciones, resolución, recta numérica, comprobaciones y recomendación final.

- **Estudiantes:** Seleccionan un contexto y establecen datos realistas. Por ejemplo: “El aula dispone de 120 soles; cada planta cuesta 15 soles y deben reservarse 30 soles para macetas”.
- **Estudiantes:** Formulan al menos una condición de máximo y otra de mínimo, escriben las inecuaciones y resuelven mostrando cada operación.
- **Docente:** Revisa cada propuesta con preguntas: “¿La variable está definida?”, “¿El signo representa exactamente la frase?”, “¿La solución tiene sentido en la vida real?”, “¿Qué valor comprueba que la propuesta funciona?”.
- **Estudiantes:** Elaboran un papelote o diapositiva. Incluyen una recta numérica clara y distinguen valores posibles e imposibles.
- **Estudiantes:** Ensayan una explicación de tres minutos en la que todos los integrantes participen.

**Producto:** Afiche o presentación con una investigación matemática completa.

### Actividad 8. Galería matemática y defensa de conclusiones: 30 minutos

**Objetivos específicos:** Argumentar conclusiones y evaluar procedimientos propios y ajenos.

**Organización:** Galería grupal y plenaria.

- **Docente:** Organiza la exposición de los productos. Cada grupo presenta durante tres minutos y responde una pregunta de otro equipo.
- **Estudiantes:** Exponen el contexto, la variable, las inecuaciones, la solución y la recomendación. Los visitantes dejan una nota con “una evidencia sólida” y “una pregunta para mejorar”.
- **Docente:** Usa la rúbrica para valorar precisión, representación, comprobación y argumentación. Destaca diferentes estrategias correctas y corrige públicamente solo errores comunes, sin descalificar el trabajo.
- **Estudiantes:** En plenaria responden: “¿Qué hace confiable una solución de inecuación?”.

### Diferenciación y transición: 10 minutos

- **Para estudiantes que necesitan apoyo:** ofrecer un banco de palabras, ejemplos de frases y signos, una plantilla con operaciones iniciadas y la posibilidad de explicar la solución oralmente antes de escribirla.
- **Para quienes terminan antes:** pedir que transformen una condición de máximo en otra equivalente y expliquen si ambas tienen el mismo conjunto solución. También pueden representar el problema en GeoGebra.
- **Docente:** Realiza una revisión rápida de los productos y anuncia el cierre: “Ahora resumiremos lo que descubrimos y comprobaremos qué objetivos alcanzamos”.

### Fase de Cierre

**Tiempo estimado: 15 minutos.**

### Síntesis colectiva: 5 minutos

El docente dibuja un organizador con cinco casillas: **interpretar, modelar, resolver, representar y comprobar**.

Cada grupo aporta una idea para completar una casilla. Se construye la síntesis:

- Una inecuación expresa una relación de desigualdad.

- La variable representa una cantidad desconocida.
- Al multiplicar o dividir por un número negativo, se invierte el signo.
- La recta numérica muestra todos los valores posibles.
- La respuesta debe interpretarse y comprobarse en el contexto.

### Reflexión metacognitiva: 5 minutos

Los estudiantes responden individualmente en una ficha:

- “¿Cómo decidí qué signo usar en mi situación y qué palabra me ayudó?”.
- “¿En qué paso tuve que invertir el signo? ¿Cómo comprobé que lo hice correctamente?”.
- “¿Qué evidencia demuestra que mi respuesta tiene sentido en la situación real?”.

### Retroalimentación, transferencia y reto: 5 minutos

**Docente:** Devuelve una fortaleza y una sugerencia concreta a cada grupo usando la fórmula: “Lograron..., para mejorar necesitan...”. Aplica el ticket de salida: **“Resuelve  $-x + 4 \leq 1$ , representa la solución y escribe una frase cotidiana que podría describirse con ella”.**

Como transferencia, el docente invita a identificar en casa una frase que contenga “como mínimo”, “como máximo”, “al menos” o “no más de”, y convertirla en una inecuación. El reto consiste en incluir la variable, el signo, una solución y una comprobación.

## Evaluación

### Estrategia de evaluación

Se aplicará evaluación diagnóstica, formativa y sumativa durante las dos sesiones, considerando tanto el procedimiento como la capacidad de explicar el significado de las respuestas.

#### Evaluación diagnóstica

Se aplica en la Fase de Inicio de la Sesión 1, durante la situación de los 20 soles, la interpretación de “como máximo” y la clasificación de límites mínimos y máximos. El docente registra ideas previas sobre operaciones, signos y uso de variables.

#### Evaluación formativa

Se aplica durante las Actividades 1, 2, 3, 4, 5 y 6 mediante observación directa, preguntas guía, revisión entre pares y corrección de procedimientos. Se proporciona retroalimentación inmediata antes de que los estudiantes elaboren el producto final.

#### Evaluación sumativa

Se aplica en la Actividad 7, mediante el afiche o presentación de investigación, y se complementa con el ticket de salida de la Fase de Cierre de la Sesión 2.

### Criterios de evaluación

- **Interpreta los signos de desigualdad** y los relaciona correctamente con frases y representaciones; vinculado al objetivo 1.
- **Define la variable y modela la situación** mediante una o más inecuaciones coherentes; vinculado al objetivo 2.
- **Resuelve correctamente la inecuación**, incluyendo la inversión del signo cuando multiplica o divide por un número negativo; vinculado al objetivo 3.
- **Representa y comprueba el conjunto solución** en la recta numérica, diferenciando límites incluidos y excluidos; vinculado al objetivo 4.
- **Argumenta la conclusión** con lenguaje matemático y evidencias relacionadas con el contexto; vinculado al objetivo 5.

### Instrumentos sugeridos

- Lista de cotejo para las Actividades 1, 2, 3 y 4.
- Guía de observación del trabajo colaborativo y la participación en la investigación.
- Rúbrica analítica para el afiche o presentación final.
- Coevaluación mediante notas de la galería matemática.
- Autoevaluación metacognitiva de la Fase de Cierre.
- Ticket de salida individual.

### Evidencias de aprendizaje

- Tabla de interpretación de signos y rectas numéricas.
- Ficha de modelación de cuatro situaciones cotidianas.
- Procedimientos razonados con comprobación de valores.
- Fichas de estaciones con correcciones justificadas.
- Afiche o presentación de una investigación contextualizada con inecuaciones.
- Respuestas de reflexión y ticket de salida.