

Matemática: El Caos, Autosimilitud y Fractales (Grados 9º a 11º)

Por Fernando Posso · 2001-06-01

Proyecto de Clase cuyo objetivo primordial es presentar la idea de modelos matemáticos no lineales y Caos Dinámico. Ofrece ejemplo claro de cómo en algunos casos sólo es posible realizar ciertos procesos matemáticos con la tecnología. Introduce ideas sobre auto similitud, recursión y fractales. El objetivo se logra, mediante el análisis de modelos de crecimiento y estabilidad de poblaciones. TIC: Internet (opcional), Hoja de Cálculo, Software para Fractales.

Matemática

Grados 9º - 11º

El Caos, Autosimilitud y Fractales

Código M911003

Descripción General

El objetivo primordial de este proyecto es introducir la idea de modelos matemáticos no lineales y Caos dinámico. Además se ofrece un ejemplo claro de cómo en ciertos casos sólo es posible realizar ciertos procesos matemáticos gracias a la tecnología. Finalmente se introducen ideas sobre auto similitud, recursión y fractales. El objetivo se logra, mediante el análisis de modelos de crecimiento y estabilidad de poblaciones. En el desarrollo del proyecto los estudiantes deben hacer uso continuo de hojas electrónicas de cálculo y de tecnología para graficar que les permita crear diagramas de bifurcación.

Objetivos Específicos del Proyecto

1. Resaltar en qué forma el uso de la tecnología facilita y posibilita el aprendizaje de conceptos matemáticos específicos.
2. Introducir ideas básicas sobre modelos no lineales y caos dinámico.
3. Proveer un ejemplo en el que sólo es posible hacer matemáticas gracias a la tecnología.
4. Presentar ideas básicas sobre auto-similitud, recursión y fractales.

Estándares Básicos en Formación Tecnológica (NETS)

| GRADOS | PARA ESTUDIANTES |

| 9° - 11° | 4,5,6,8,9,10 |

Conocimientos y Destrezas Previas del Estudiante

1. Tener una buena fundamentación en funciones y nociones básicas de cálculo diferencial y estadística que le permitan entender adecuadamente el tipo de problemas en estudio.
2. Navegar por Internet y realizar búsquedas virtuales.
3. Manejar software para el procesamiento de texto y gráficos (ej: Word, más el sitio de Internet dado en la parte "Desarrollo del Proyecto", Sección de estudiantes)
4. Saber utilizar software para presentaciones (ej: Power Point).

Recursos y Materiales

1. Disponer del hardware necesario que permita manejar los programas más usuales de procesamiento de datos, incluyendo los periféricos necesarios para ese fin.
2. Se sugieren los siguientes sitios en Internet relacionados con el tema: Software para Matemáticas desde Internet En esta página del portal de Zdne, asociado a la compañía Microsoft, se puede encontrar software de matemáticas, de utilidad

en el proyecto, incluyendo un programa de gráficas asociadas con Caos. Se puede "bajar" de Internet gratuitamente. En Inglés. Teniendo en cuenta necesidades de traducción del Inglés al Español se recomienda usar en este proyecto un traductor como el que se ofrece en el [Traductor de Altavista](#).

Tiempo de Duración

Se estima un tiempo de tres a cuatro semanas para la realización del proyecto, que puede extenderse de acuerdo a los criterios del profesor.

Desarrollo de Proyecto

El Profesor deberá:

1. Conseguir los programas de computador necesarios para apoyar la realización del proyecto, que pueden "bajarse de Internet", de los sitios sugeridos en la sección de Recursos y Materiales. Estos están disponibles en Inglés; por lo tanto el profesor debe contar con los recursos necesarios para adaptarlos para que puedan ser utilizados por los estudiantes. Por ésto es recomendable contar con el apoyo de los profesores de Tecnología y de Inglés. También puede realizar una búsqueda en Internet hasta encontrar otros sitios que ofrezcan software en español. Ver la sección de Recursos (Sitios relacionados con educación y tecnología) de este Portal.
2. Discutir con los estudiantes modelos lineales de población, donde los cambios en la misma están determinados por las tasas de nacimiento y muerte. Los libros de texto sobre estadística contienen ejemplos de estos modelos que deben ser investigados por el profesor para ser explicados a los estudiantes. Ellos sirven como preámbulo para la explicación de los modelos no lineales.
3. Explicar a los estudiantes el modelo de población de Verhulst, el cual se puede expresar por la ecuación diferencial $dx/dt = kx(M - x)$, donde x es la población actual, M es la máxima población que permite el medio ambiente y k es una constante que relaciona las tasas de nacimiento y muerte de la población. El modelo puede ser presentado en una hoja de cálculo si se utiliza la siguiente ecuación de diferencias del modelo: donde es la población de la n -ésima

generación. En la hoja electrónica generalmente se registran los datos que se encuentran en el rango de las primeras 100 a 1000 generaciones de la población, para poder ver los datos que da el modelo y la gráfica del mismo.

4. Determinar las condiciones generales que debe tener un informe escrito por los estudiantes en el que se investiga la naturaleza de los conceptos planteados a través de los objetivos específicos del proyecto. El informe final debe tener la interpretación de cada estudiante sobre las diversas soluciones a los modelos planteados, a saber: estabilidad, bifurcación, caos dinámico y fractales. También debe incluir la interpretación de los gráficos asociados con cada uno de los conceptos y algunas conclusiones en las que se destaquen posibles aplicaciones concretas de estos conceptos en la vida de hoy.

El Estudiante deberá:

1. Usar hojas electrónicas de cálculo para analizar los modelos de población lineales discutidos con el profesor. Realizar un reporte escrito en el que se definan sus características y se den algunos ejemplos de situaciones que corresponden a modelos no lineales.
2. Utilizar la ecuación logística, , la cual está muy ligada al modelo de Verhulst, para realizar gráficas usando parámetros de control (r) y condiciones iniciales (x_0) diferentes, donde x_0 es siempre un valor del intervalo $[0,1]$. Las gráficas se pueden generar a partir del procesamiento de los datos, en las hojas de cálculo.
3. Investigar distintos tipos de aplicaciones que se dan cuando r y x_0 se cambian, en aspectos como: Estabilidad de las Soluciones, Bifurcaciones y Caos, de la siguiente forma:

Estabilidad de las Soluciones: Para cualquier valor del parámetro de control r en el intervalo $[0,3]$ y usando diferentes valores de poblaciones iniciales x_0 , se puede estudiar cómo las soluciones tienden a un estado de estabilidad. Este estado de estabilidad puede relacionarse al parámetro de control, usando la ecuación $x = (r-1)/r$ y se encuentra tomando a en la ecuación logística y luego se resuelve para x_n . En un sentido general, estabilidad significa que si la población es perturbada por una pequeña cantidad, ella volverá a su valor estable después de unas pocas generaciones. Sin embargo para valores de r mayores a 3, la población pierde su

estabilidad. Otros parámetros de control pueden investigarse. Bifurcaciones: Mediante el uso de las hojas de cálculo es posible graficar los resultados de largo plazo; o el valor simple de una población estable, o los valores múltiples, con respecto al parámetro de control. La primera bifurcación ocurre para $r=3$, para valores menores o iguales que 3 hay sólo un valor para la población a largo plazo pero para valores mayores que 3, hay dos. Otras bifurcaciones pueden verse usando el programa de computador referido. Caos: Para algunos valores del parámetro de control, como 3.6 por ejemplo, la población nunca se asentará en uno o en unos pocos valores alternantes. Tales poblaciones se conocen como caóticas. Se pueden investigar otros valores del parámetro de control para conseguir otras poblaciones caóticas. 4. Examinar la idea de auto-similitud a partir de los diagramas de bifurcación. En este contexto todas las bifurcaciones parecen esencialmente iguales con excepción de la escala, (el patrón general hace lucir todas las bifurcaciones muy parecidas cuando éstas se observan en detalle). Los puntos de bifurcación pueden ser muy importantes porque en ellos un pequeño cambio del parámetro de control, puede producir una marcada diferencia en la población. 5. Examinar el concepto de Fractal, usando los diagramas de bifurcación. Estos tienen estructura de fractales, es decir un patrón de formación de una figura que se repite varias veces pero en escalas cada vez más pequeñas. Se pueden hacer otros fractales a partir de diagramas que manejen autosimilitud. 6. Dibujar otros fractales, usando software que se puede "bajar" libremente de Internet, en programas tales como Fractree, Fractint y Fractal explorer. 7. Realizar la exposición final del proyecto de acuerdo a los lineamientos generales dados previamente por el profesor.

Evaluación

1. Evaluar en cada estudiante su habilidad para : Realizar cálculos correctos mediante el uso de los modelos utilizados; Determinar y explicar la estabilidad de las soluciones; Reconocer bifurcaciones y el inicio de sistemas caóticos y Reconocer autosimilitudes. El profesor definirá con los estudiantes los criterios de evaluación sobre la presentación.
2. El profesor está en libertad de crear cualquier otro criterio de evaluación que considere pertinente y adecuado, de acuerdo al desarrollo del currículo de la

materia a la que corresponde este proyecto.

Nota

EDUTEKA busca mejorar continuamente, por esta razón es de mucha utilidad conocer la opinión de los usuarios sobre la calidad de los proyectos que se ofrecen. Nos gustaría conocer de qué manera podemos mejorar este proyecto. Si lo ha utilizado en clase o se interesó en él, por favor conteste las preguntas. Sólo tiene que presionar clic en la siguiente ENCUESTA y enviarnos sus resultados.

Créditos

Idea originalmente tomada del libro "Connecting Curriculum and Technology" de la "International Society for Technology in Education (ISTE) de Estados Unidos y desarrollada específicamente por:

John Olive, University of Georgia, Athens, Georgia, E.U. jolive@coe.uga.edu Barney Ricca, Bishop Dunne High School, Dallas, Texas, E.U. bricca@bdhs.org. Adaptado por Fernando Posso.