TEMA 2: Elementos básicos de probabilidades y distribuciones teóricas más usadas.

Objetivo del Tema:

Qué el alumno sea capaz de:

- Aplicar e interpretar los fundamentos de la teoría de probabilidades en la solución de problemas.
- Identificar y caracterizar las distribuciones probabilísticas: BINOMIAL y NORMAL. y calcular probabilidad haciendo uso de las tablas correspondientes.
- Conocer las distribuciones Chi-Cuadrado, t de Student y el cálculo de probabilidad haciendo uso de las tablas correspondientes.

Autopreparación del Tema II

El alumno debe conocer que la teoría de las probabilidades es necesaria conocerla, ya que la estadística, se basa en las probabilidades y únicamente conociendo ésta es factible poder estudiar la inferencia estadística, la cual tiene determinado grado de incertidumbre que puede ser medido en términos de probabilidades.

Los aspectos fundamentales de este tema son:

- Distinguir entre fenómeno aleatorio y determinista Conocer los conceptos de suceso, suceso seguro, nulo, mutuamente excluyente, complementario, espacio muestral.
- Calcular e interpretar probabilidades haciendo uso de la definición clásica, estadística y axiomática.
- Aplicar las propiedades fundamentales de la Teoría de las probabilidades.

Tema II

Definición de Probabilidad Clásica y Frecuencial. Probabilidad Condicional. Regla de la Suma y de la Multiplicación de probabilidades. Teorema de Bayes. Distribuciones teóricas más usadas: la Distribución Binomial y la Distribución Normal. Distribuciones muestrales: Distribución t o de Student, Distribución F de Fisher y Distribución Chi cuadrado

La teoría de las probabilidades surge en los siglos XVI-XVIII relacionada con problemas producto de los juegos de azar, entre los principales precursores de esta Teoría se encuentra, entre otros, el matemático Pascal.

La probabilidad es una medida cuantitativa de que las posibilidades pueden llegar a ser realidades.

La Teoría de las probabilidades es la base de la inferencia estadística, de ahí la necesidad de su estudio, de modo que se puedan realizar medidas descriptivas, para hacer inferencias de la población.

Para desarrollar las Teorías de las probabilidades es necesario definir algunos, conceptos.

EXPERIMENTO: Los experimentos pueden ser deterministas o aleatorios.

Un experimento es DETERMINISTA, cuando se puede predecir con total exactitud el resultado del experimento, claro si se conoce perfectamente las condiciones en las que se realiza el experimento.

Ejemplos: Si encendemos un fósforo, y lo sostenemos en la mano, sabemos lo que va ocurrir: se apaga.

Si se toma un vaso y lo deja caer de un 2do piso, se sabe lo que va a ocurrir: se hará añicos.

Un experimento es ALEATORIO, cuando no se puede predecir con exactitud su resultado antes de realizarlo pero si los posibles resultados y debe ser susceptible de repetición. Ejemplo : En el lanzamiento de un dado; se conoce los posibles resultados pero no se conoce **con exactitud el resultado.** Otros ejemplos pudieran ser: cantidad de lluvia caída, rendimiento de un cultivo, incremento de peso de un animal etc.

Los experimentos aleatorios deben tener la característica de poderse repetir, la experiencia ha demostrado, que si éste se puede repetir un gran número de veces, la frecuencia relativa tiende a estabilizarse, y a esto se le llama

REGULARIDAD ESTADISTICA.

Se plantea que la estadística es la Tecnología del método científico que proporciona instrumentos para la toma de decisiones, cuando estas se adoptan en ambiente de incertidumbre y siempre que pueda ser medida en términos de probabilidad. Luego es una ciencia que estudia los fenómenos aleatorios.

SUCESO O EVENTO Cualquier característica observada del resultado de un experimento.

Es aleatorio si como resultado del experimento él puede ocurrir o no ocurrir.

ESPACIO MUESTRAL. Es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa por "S".

Ej. Lanzamiento de una moneda ...S:[C E] donde C: Cara E: Escudo

Ej. Lanzamiento de dos monedas...S:[CC CE EC CC]

Ej. Lanzamiento de un dado ......S:[1, 2, 3, 4, 5, 6]

El espacio muestral puede ser finito o infinito según el conjunto tenga un número finito o infinito de elementos.

PUNTOS MUESTRALES. Cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Los sucesos pueden ser:
Sucesos Simple. Son aquellos que tienen un solo punto muestral.

Suceso Compuesto. Son aquellos que tienen dos o más puntos muestrales.
Suceso seguro o cierto: Un suceso A definido en S es seguro o cierto, si dado un conjunto de condiciones su ocurrencia es inevitable. Ej Se lanza un dado, suceso salir un número mayor que cero y menor que 7

Suceso imposible o nulo. Un suceso A es imposible si definido un espacio muestral y dado un conjunto de condiciones, su ocurrencia es imposible. Ej. Se lanza un dado, suceso A: salir el número 7 (que se representa por el conjunto vacío o nulo).

Subevento: A es un subevento de B si $A \subset B$; en tal caso cada vez que ocurra A ocurrirá B.
Ej. Se lanza un dado.
A ... Salir número impar [1, 3, 5] Recuerden los números impares son los que no tienen mitad.
B ... Salir número primo [1, 2, 3, 5] Recuerden los números primos son los que no se pueden descomponer en factores.

Suceso complementario: Un suceso A es complementario si su complemento viene dado por todos los puntos donde no ocurre A y se denota por A^c ó $\overline{A}$ ó A' indistintamente

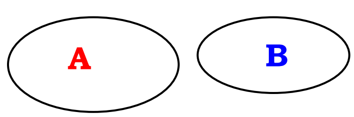
Ej. Se lanza un dado.

A ... Salir número impar S:[1, 3, 5]
A'... No salir número impar S:[2, 4, 6]
(el símbolo (') está indicando negación hay libros que pone en vez de este símbolo una pequeña c en la parte derecha superior ó una barrita encima de la letra tal como se mostró anteriormente)

Suceso Mutuamente Excluyentes. En un mismo experimento aleatorio dos sucesos A y B se dice que son mutuamente excluyentes, si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro.

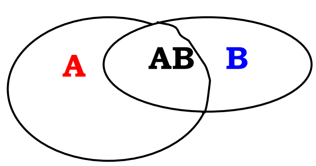
Ej. Si se lanza una moneda, la ocurrencia de que caiga cara, excluye la ocurrencia de que caiga escudo.

Ej. El nacimiento de una hembra, excluye el nacimiento de un varón. Por tanto cuando dos sucesos son mutuamente excluyentes, no tienen elementos comunes, gráficamente:



Por lo tanto si cada circulo representa a A Y B no existe la intersección de AB sino que esta es igual al conjunto vacío.

Si los sucesos fueran, ***no excluyentes,*** gráficamente: estos círculos se verían uno montado en una parte del otro.



Que los sucesos sean mutuamente excluyentes o no, está relacionado con el experimento aleatorio, se puede dar el caso que dos sucesos sea mutuamente excluyentes, en un experimento, y no en otro.

Así A y A' son mutuamente excluyentes.

OPERACION ENTRE EVENTOS.

OPERACIÓN Intersección:

Se llama intersección o producto de A y B, Al suceso que consiste en la ocurrencia simultánea de A y B. Se denota por AB, $A \cap B$, A.B
Ej. Se lanza un dado. A: número primo [1,2,3,5]
B: número impar [1, 3, 5], por tanto AB: [1, 3, 5], esto es los elementos comunes en ambos sucesos.

OPERACION UNION:

El suceso A unión B, es el que consiste en la ocurrencia de A ó B se denota por $A \cup B$; A+B (esto indica que ocurra al menos uno de los dos, que ocurra A ó que ocurra B, también la palabra al menos uno está indicando que ocurra uno ó que ocurran los dos).
Ej. Se lanza un dado
A: Que salgan los 4 primeros números [1,2,3,4]
B: Que salgan los 3 últimos números [4,5,6]
Así $A \cup B$ = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

DEBE QUEDAR CLARO QUE CUANDO SE DICE QUE OCURRA "A y B" ESTAN PIDIENDO INTERSECCION (producto) Y CUANDO SE DICE QUE OCURRA "A ó B" ó "Al menos uno" ESTAN PIDIENDO UNION (suma)

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD.

La definición clásica de probabilidad se formula por Laplace en el siglo XIX, concretamente en el año 1812. Y en la misma se plantea:

Si S, es un espacio muestral finito y equiprobable entonces la probabilidad de ocurrencia de cualquier suceso A definido en S estará dado por la relación:

$$P(A) = N(A)/N(S)$$

dónde N(A)= casos favorables al suceso A y N(S)= casos totales posibles.

Ejemplo. La probabilidad de obtener el número 6 al lanzar un dado será
P(A) = 1/6 Siendo el suceso A: sacar el número 6

Ejemplo. La probabilidad de sacar un As de un juego de cartas será
P(A) = 4/52 Siendo el suceso A: sacar un As.

Recuerden que el juego de cartas tiene 52 cartas, 13 corazón rojo (♥), 13 diamantes rojos (♦), 13 corazones negros (♠), 13 tréboles negros (♣), y dentro de cada estos grupos tiene As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, y K

Esta definición se conoce como definición a "priori" porque no es necesario realizar el experimento para calcular la probabilidad de ocurrencia. Pero tiene las siguientes limitaciones:
1.- No puede ser aplicada a espacios muestrales infinitos.
2.- No puede ser aplicada cuando los resultados posibles no son igualmente probables.

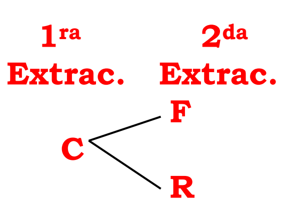
PROPIEDADES:

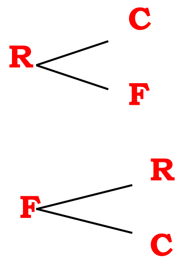
$P(A) \geq 0$ $P(S) = 1$ LO QUE IMPLICA $0 \leq P(A) \leq 1$

Ejemplo #1 Una cartera contiene un rublo, un forinto y una corona. Si el experimento consiste en la extracción de dos monedas (sin reposición) se pide:
a.- Describir el espacio muestral
b.- La probabilidad de extraer un rublo y una corona
c.- La probabilidad de que no salga rublo.
d.- La probabilidad que salga un forinto.
e.- La probabilidad de que la primera sea un forinto.
f.- La probabilidad de que la primera sea un forinto y la segunda una corona.

Antes de comenzar el ejercicio se debe aclarar que "sin reposición" quiere decir que se saca la moneda y no se vuelve a poner en la cartera. Esto indica que lo que ocurre en la segunda extracción está determinado por lo que ocurrió en la primera extracción.

a.- El espacio muestral a veces es muy fácil describir y contar los puntos como es el caso cuando se lanzan dos monedas donde S:[CC EE CE EC]. Otras veces se requiere de una organización por la complejidad de imaginar sólo lo que tiene que ocurrir. Se puede hacer a través del llamado diagrama de árbol, que es un método que se utiliza cuando las selecciones y los elementos a extraer u observar no es muy grande. Y la misma consiste en ir poniendo lo que puede ocurrir en cada extracción, luego de poner lo que puede ocurrir en la primera extracción, partiendo de lo que ocurrió en ella, se va poniendo lo que podría ocurrir en la segunda habiendo ocurrido ese resultado en la primera, y la combinación de lo que ocurrió en la primera y segunda extracción, da el resultado del espacio muestral claro está teniendo en cuenta si las selecciones son "con ó sin reposición", esto es:





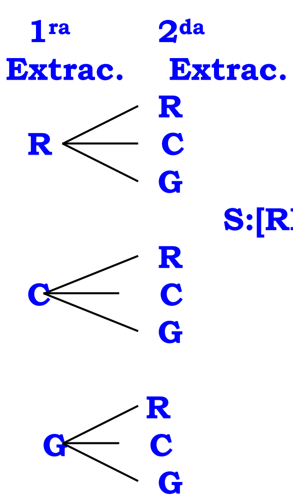
S: {CF CR RC RF FR FC}

N(S) = 6

b.- P(RC) = 2/6 = 1/3
c.- P(R'R') = 2/6 = 1/3
d.- P(F) = 4/6 = 2/3
e.- P(FF') = 2/6 = 1/3
f.- P(FC) = 1/6

Ejemplo.#2 Una cesta contiene un clavel una rosa y una gardenia. Si se extraen 2 flores (con reposición)se pide:
a.- Defina el espacio muestral.
b.- Defina suceso imposible.
c.- La probabilidad de extraer una rosa y un clavel.
d.- La probabilidad de extraer 1ro una rosa y después un clavel.
e.- La probabilidad de que no salga el clavel.
Se debe aclarar que "con reposición" indica que se hace la extracción se ve lo que es, y se vuelve a reponer a la cesta, esto está indicando que lo que ocurre en la segunda extracción, no está influenciada por lo que ocurre en la primera extracción.

a.- Espacio muestral:



S:[RR RC RG CR CC CG GR GC GG]
N(S) = 9

Fígense como a pesar de haber una sola flor de cada clase, se pueden sacar dos rosas o dos claveles o dos gardenias, y esto es debido a que como las extracciones son con reposición que se saca se mira que tipo de flor es, y se devuelve a la cesta, existe la posibilidad que en la segunda extracción vuelva a estar los tres tipos de flores en la cesta mientras que si fuera sin reposición cuando se hace la primera extracción ya esta flor quedaría fuera de la cesta y en la segunda extracción, no habría la posibilidad de volverla a encontrar, como pasó en el ejercicio anterior.

b.- Que salga un tulipán.

c.- P(RC) = 2/9   Aquí no señalan orden por lo tanto, hay dos posibilidades rosa, clavel y clavel rosa.

d.- $P(R_1\ C) = 1/9$ Aquí están indicando un orden; 1ro que salga la rosa y en la 2 da extracción que salga un clavel
e.- P(C'C') = 4/9

DEFINICION ESTADISTICA DE PROBABILIDAD.

Debido a las limitaciones que confronta la definición clásica de probabilidad, se comenzaron a realizar experimentos con los juegos de azar, surgiendo el concepto de **REGULARIDAD ESTADISTICA**.

QUE NO ES MAS QUE LA ESTABILIDAD QUE PRESENTAN LAS FRECUENCIAS RELATIVAS AL CONSIDERAR UN GRAN NUMERO DE VECES UN EXPERIMENTO BAJO LAS MISMAS CONDICIONES.

Ej. Lanzamiento de una moneda "n" veces, ya a partir del lanzamiento 400 y hasta el 1000, el comportamiento de que caiga cara es de 0.40, 0.505, 0502 ... es decir se estabiliza.

Otro ejemplo, es el nacimiento de niños y niñas, que cuando se ve en un número grande de veces, este se estabiliza.

A partir de la regularidad estadística, surge la definición estadística de probabilidad que plantea:

Si n tiende a infinito la frecuencia relativa f(A), alcanza un cierto valor límite o ideal, y entonces puede asociarse a un número P(A) tal que f(A), sea iguala P(A) si:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A)$$

Ejemplo: Un tirador ha acertado 70 veces en un blanco de un total de 100 intentos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una próxima prueba, el tirador haga blanco?.

EXPERIMENTO: Tirar al blanco. n = 100

SUCESO A : ACERTAR EN EL BLANCO m = 70
P(A) = 70/100 = O.70   Se espera que haga blanco un 70% de las veces que se tire, siempre que n sea grande.

Limitaciones de esta definición:

El número de veces tan grande que tiene que repetirse el experimento bajo las mismas condiciones, esto no siempre se puede cumplir.

Esta definición se conoce como definición "a posteriori", porque si no se realiza el experimento no se puede calcular la probabilidad.

AUTOEVALUACION

1.- ¿Qué es un experimento aleatorio?

2.- ¿Cuáles son los sucesos mutuamente excluyente?

3.- ¿Cuáles son los sucesos complementarios?

4.- Explique la diferencia entre unión e intersección y proporcione un ejemplo de cada uno.

5.- ¿Cómo se define la Probabilidad clásica? y ¿Bajo que condiciones puede aplicarse?

6.- ¿Cómo se define la probabilidad Estadística?

7.- En una amplia red metropolitana se seleccionó una muestra de 500 entrevistados para determinar diversas informaciones relacionada con el comportamiento del consumidor. Entre las preguntas hechas se encontraba, "¿disfruta ir de compras?". De 240 hombres 136 contestaron que sí. De 260 Mujeres 224 contestaron que sí.

a.- De un ejemplo de un evento simple.
b.- ¿Cuál es el complemento de disfrutar ir de compras?.
c.- ¿Cual es la probabilidad de que el entrevistado seleccionado en forma aleatoria …
c.1 Sea hombre?
c.2 disfrute ir de compras?
c.3 Sea mujer?
c.4 no disfrute ir de compras?
c.5 Sea mujer y disfrute ir de compras?
c.6 Sea hombre o mujer?

La definición estadística, también muestra sus limitaciones, ya que existen experimentos que no se pueden repetir un número grande de veces y mucho menos, bajo las mismas condiciones, como para que se conozca la probabilidad.

Es por ello que en 1933 se axiomatiza la probabilidad y se parte de 3 axiomas básicos, para su desarrollo.

Si S es un espacio muestral y A un suceso definido en S, se dirá, que <u>TODO SUCESO "A" DEFINIDO EN "S" ESTA ASOCIADO A UN NUMERO REAL LLAMADO PROBABILIDAD DE "A", EL CUAL CUMPLIRA CON LOS SIGUIENTES AXIOMAS:</u>

1.- $P(A) \geq 0$
2.- $P(S) = 1$
3.- $P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup \ldots \cup Ak) = P(A1) + P(A2) + \ldots + P(Ak)$ si los k sucesos, son mutuamente excluyentes o lo que es lo mismo si para cada par AiAj = conjunto vacío siendo i diferente de j.

Propiedades.

<u>Propiedad #1</u> La probabilidad de un suceso imposible o nulo es cero:

$P(\varnothing) = 0$ $\qquad\qquad$ $A \cup \varnothing = A$

$P(A \cup \varnothing) = P(A)$ POR AXIOMA 3

$P(A) + P(\varnothing) = P(A)$ por tanto $P(\varnothing)=0$

De esta propiedad y de los axiomas 1 y 2 se evidencia que:

$0 \leq P(A) \leq 1$

Propiedad #2

La probabilidad del suceso complementario al suceso A es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra A.

$P(A') = 1 - P(A)$ $\qquad$ $A \cup A' = S$

$P(A \cup A') = P(S)$ por axioma 3

$P(A) + P(A') = P(S)$ por axioma 2

$P(A) + P(A') = 1$ por tanto

$P(A') = 1 - P(A)$

Propiedad #3

Si A y B son dos sucesos definidos en S, la probabilidad de que ocurra A y no ocurra B será:

$P(AB') = P(A) - P(AB)$ $\qquad$ $A = AB \cup AB'$

$P(A) = P(AB) \cup P(AB')$por axioma 3

$P(A) = P(AB) + P(AB')$ despejando

$P(AB') = P(A) - P(AB)$

Propiedad #4

Si A y B son dos sucesos definidos en S entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$A \cup B = AB' \cup AB \cup A'B$

$P(A \cup B) = P(AB' \cup AB \cup A'B)$por axioma 3

$P(A \cup B) = P(AB') + P(AB) + P(A'B)$

$P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(AB) + P(B) - P(AB)$

$P(A \cup B) = P(A) - \cancel{P(AB)} + \cancel{P(AB)} + P(B) - P(AB)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Propiedad #5

Si A es un subconjunto de B entonces $P(A) \leq P(B)$

Se sabe que $P(A'B) = P(B) - P(AB)$

Si A es un subconjunto de B entonces $AB = A$ por tanto

$P(A'B) = P(B) - P(A)$ Lo que implica que $P(B) > P(A)$

Propiedad #6

Si A, B, y C son sucesos definidos en S, entonces:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

como ejercitación haga esta demostración Ud. y le servirá de estudio independiente.

Ejemplo: De un grupo de 1000 habaneros, 420 leen Granma, 105 leen Juventud Rebelde y 45 leen Granma y Juventud Rebelde.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un habanero aleatoriamente del grupo y lea Granma ó Juventud Rebelde.

b.- ¿Qué probabilidad hay de que el habanero seleccionado no lea ninguno de los periódicos.?

c.- ¿Qué probabilidad hay que lea sólo Granma.?

A: lee Granma; B: lee Juventud Rebelde.
N= 1000
N(A) = 420 POR TANTO P(A) = 0.42
N(B) = 105 " " " P(B) = 0.105
N(AB) = 45 " " " P(AB) = 0.045

a.- $P(A \text{ U } B) = P(A) + P(B) + P(AB)$

$= 0.42 + 0.105 - 0.045$
$= 0.48$

b.- $P(A \cup B)' = 1 - P(A \text{ U } B)$

$= 1 - 0.48$
$= 0.52$

c.- $P(AB') = P(A) - P(AB)$

$= 0.42 - 0.045$
$= 0.385$

Hasta aquí se ha estudiado el cálculo de probabilidades referido a un suceso (simple o compuesto) que ocurre en un espacio muestral. Es decir:

$P(A) = N(A)/N(S)$ a esta probabilidad se le podría llamar ***PROBABILIDAD TOTAL*** por el hecho de estar calculada en función de todos los resultados posibles.

En contraposición a este concepto se estudiará ahora la ***PROBABILIDAD CONDICIONAL***, que como su nombre lo indica será la posibilidad de que ocurra un suceso, bajo la ocurrencia de otro.

Esto implica una referencia, no al espacio muestral en su totalidad, sino a otro suceso o subconjunto del espacio muestral; esto es al suceso al que esté condicionada.

Se representa esta probabilidad utilizando el símbolo **"/"** que se lee como "dado que" y después de él se plantea la condición; así será:

P(A/B) QUE SE LEE LA PROBABILIDAD DE "A" "DADO QUE" "B" YA *OCURRIO es decir condiciona la probabilidad de la ocurrencia de A, a que B ya tiene que haber ocurrido.*

Se define:

Se define la probabilidad condicional, como la probabilidad de la intersección de los sucesos, partido la condición. Así:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B)$$

Se debe reafirmar que la condición es el suceso que está después **(del símbolo "/")** de "dado qué"

Ejemplo. En un aula se forman 4 brigadas de estudiantes con la siguiente composición:

Brig.	**V**	**H**	**total**
1	5	5	10
2	6	4	10
3	3	8	11
4	7	3	10
total	21	20	41

a.- ¿Cuál es la probabilidad, si se selecciona un estudiante al azar, de que sea hembra?

b.- ¿Cuál es la prob. de que se seleccione un estudiante al azar, y sea hembra de la brigada #2?

a.- $P(H) = 20/41 = 0.448$

b.- $P(H/B_2) = 4/10 = 0.4$ ó $[N(HB_2)/N(S)]/[N(B_2)/N(S)=$

$$[4/41]/[10/41]= 4/10 = 0.4$$

Fígense que el inciso "a" se trata de una probabilidad total, se refiere a la totalidad de las hembras, mientras que en el inciso "b" están pidiendo la probabilidad de las hembras pero "condicionada" a que sea de la brigada 2, es decir hay una condición por tanto es una probabilidad condicionada.

Se debe señalar que también es posible encontrar la probabilidad condicional no solo de dos sucesos sino de combinaciones de dos o más sucesos. Y aunque se emplee la definición clásica ésta se cumple también aplicando la definición estadística.

SUCESOS INDEPENDIENTES.

Dos sucesos A y B se llaman independientes, cuando la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos, no depende de la ocurrencia o no del otro, lo cuál puede ser expresada de la siguiente forma:

Dos sucesos son independientes si:

P(A/B) = P(A) ó P(B/A) = P(B)

Si son independientes se cumple que:

$P(AB) = P(A)\, P(B)$

Se debe aclarar que sólo se puede comprobar independencia a través de esta última fórmula si se tienen las 3 probabilidades y comprobar si la intersección es igual al producto de la probabilidad de ambos sucesos. Ejemplo de independencia:

Si se lanza una moneda dos veces, la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento, no depende de que salga cara o no en el segundo lanzamiento.

Ejemplo:

Si una caja contiene 100 piezas de las cuáles 20 son defectuosas y se extraen aleatoriamente 2 piezas una a una(con reposición).¿Cuál será la probabilidad de obtener pieza defectuosa EN LA 1ª EXTRACCIÓN?: 20/100=0.20 ¿Y cuál será la probabilidad En la 2ª EXTRACCION de obtener pieza defectuosa? 20/100=0.20 es decir exactamente igual, esto es debido a que se repuso la primera. ***Por tanto cuando las extracciones son con reposición se puede considerar que son independientes. Ya que lo que ocurre en la 2ª extracción es independiente de lo que ocurre en la primera.***

Pero si no se reemplaza, es decir se hace la extracción "sin reposición", ¿qué pasa?, Qué la probabilidad de que salga defectuosa la pieza en la segunda extracción depende de lo que salió en la primera. Si en la primera salió una pieza defectuosa. La probabilidad de pieza defectuosa en la segunda extracción será 19/99=0.19; pero si lo que salió en la primera extracción fue, una pieza en buen estado, entonces la probabilidad de pieza defectuosa en la segunda extracción será 20/99.

EN ESTE CASO LO QUE SUCEDE EN LA SEGUNDA EXTRACCION, DEPENDE DE LO QUE OCURRIO EN LA PRIMERA EXTRACCION PORQUE FUE SIN REPOSICION ESA EXTRACCION, YA LOS SUCESOS DEJARON DE SER INDEPENDIENTES PARA CONVERTIRSE EN DEPENDIENTES.

Generalmente para los juegos de azar, es fácil decidir si dos sucesos son independientes o no. Para otros experimentos aleatorios, se debe tener más cuidado.

Ejemplo. Si se tienen 3 sucesos definidos en un espacio muestral S y se conoce que:
P(A)=0.40 P(B)=0.42 P(C)=0.15 P(A/B)=0 P(A/C)=0 P(C/B)=0
Diga si:
a.- A y B son independiente
b.- A y C son mutuamente excluyentes
c.- B y C son independientes
d.- A y B son equiprobables
?
a.- P(A/B) = P(A) ya que para que A y B sean independientes se debe cumplir esta relación.

Pero P(A/B) = 0 y P(A) = 0.40 luego son diferentes por tanto no son independiente.

b.- Para que sean mutuamente excluyentes se debe cumplir que P(AC)=0, ya que al no tener elementos comunes(AC), la intersección es igual al conjunto vacío.

Como $P(A/C)=0$ eso implica que $P(AC)=0$ ya que $P(A/C)=P(AC)/P(C)$ por lo tanto los sucesos A y C son mutuamente excluyentes.

?   ?

c.- $P(B/C) = P(B)$ ó $P(C/B) = P(C)$ ya que para que sean independientes se debe cumplir cualquiera de las dos. ?

$P(C/B) = P(C)$

$0 \neq 0.15$ por tanto no son independientes.

Para que sean equiprobables se debe cumplir que $P(A) = P(B)$ y son diferentes, ya que $P(A) = 0.40$ y $P(B) = 0.42$, por tanto no son equiprobables.

REGLA DEL PRODUCTO O MULTIPLICACION

Si A y B son sucesos definidos en S, la probabilidad de AB, de acuerdo a la definición de probabilidad condicional, se puede expresar como:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A)$$
$$P(AB) = P(B)\,P(A/B)$$

De la misma forma:

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

LO QUE EVIDENTEMENTE IMPLICA QUE LOS SUCESOS SON DEPENDIENTES.

Luego la regla del producto expresa la probabilidad de que ocurra A y B en un orden determinado: $P(AB)=P(A)P(B/A)$ que primero salga A y en segundo lugar salga B ó $P(AB)=P(B)P(A/B)$ que primero salga B y en segundo lugar A

Si no interesa el orden, sino que salga una vez A y una vez B, entonces se tienen que expresar las dos combinaciones posibles que hay: $P(AB) = P(A_1 B_2) + P(B_1 A_2)$

Ejemplo. De una urna que contiene 4 esmeraldas y 1 brillante, se extraen 2 piedras, una a una, sin reposición. Calcule la siguiente probabilidad.

a.- Que la 1ra piedra sea esmeralda y la 2da brillante.
b.- Que las dos piedras sean esmeraldas
c.- Solo una sea esmeralda.

Solución: como es sin reposición las extracciones, entonces los sucesos son dependientes, además que piden orden.

a.- $P(E_1 B_2) = P(E)P(B/E)$
$= 4/5 \, . \, 1/4$
$= 4/20 = 1/5 = 0.20$

b.- $P(E_1 E_2) = 4/5 \, . \, 3/4$
$= 16/20 = 6/10 = 0.6$

c.- $P(E_1 B_2 \cup B_1 E_2) = P(E)P(B/E) + P(B)P(E/B)$

$$= 4/5 \, . \, 1/4 + 1/5 \, . \, 4/4$$
$$= 4/20 + 4/20 = 8/20 = 4/10 = 0.4$$

REGLA DE LA ADICION O SUMA DE PROBABILIDAD

Si se tienen dos sucesos A y B, definidos en S, la probabilidad de A U B se expresa como:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Y esto indica "al menos uno", es decir la probabilidad de A ó B ó de ambos AB.

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces P (AB)= 0 y por tanto la

$P(A \cup B)$ será igual a: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

RESUMEN DE LA INTERSECCION: P(AB)

Excluyentes (no tienen elementos comunes) $P(AB)=0$

$P(A/B)=0$

$P(B/A)=0$

No Excluyentes (tienen elementos comunes) y pueden ser independientes o dependientes.

Independientes: $P(A/B) = P(A)$ ó $P(B/A) = P(B)$

P(AB) = P(A).P(B)

Dependientes: $P(AB) = P(A)P(B/A)$

ó $= P(B)P(A/B)$

RESUMEN DE LA UNION: $P(A \cup B)$

Excluyente (no tiene elementos comunes) $P(AB)=0$

Por tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

No Excluyentes (tienen elementos comunes) $P(AB) \neq 0$

Por tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

AUTOEXAMEN

1.- ¿Cuándo dos sucesos son independientes?

2.- ¿Cuándo dos sucesos son mutuamente excluyentes?

3.- Un embarque de 10 muñecos contiene 3 muñecos y 7 muñecas.

a.- Si se seleccionan dos muñecos del embarque, sin reposición ¿cuál es la probabilidad de que:

a1.- los muñecos seleccionados sean muñecas?

a2.- haya una muñeca y un muñeco?

a3.- el primer muñeco seleccionado sea una muñeca y el segundo un muñeco?.

b.- compare la respuesta a.2 y a.3 y explique porque son diferentes.

4.- A partir de una investigación realizada, se supo que el 70% de los hombres son fumadores; y que padecen afecciones respiratorias dado que son fumadores un 50%. Además se conoció que no siendo fumadores, dado que padecen de afecciones existen un 40%, Si se realiza el experimento de seleccionar un individuo del grupo al azar, diga:

a.- Probabilidad de que no sea fumador.

b.- Probabilidad de que sea fumador y padezca de afección pulmonar.

c.- Probabilidad de que fume dado que padece de los pulmones.

d.- Probabilidad de que no padezca de afecciones pulmonares dado que fuma

e.- Probabilidad de que padezca de afección respiratoria.

Teorema de Bayes.

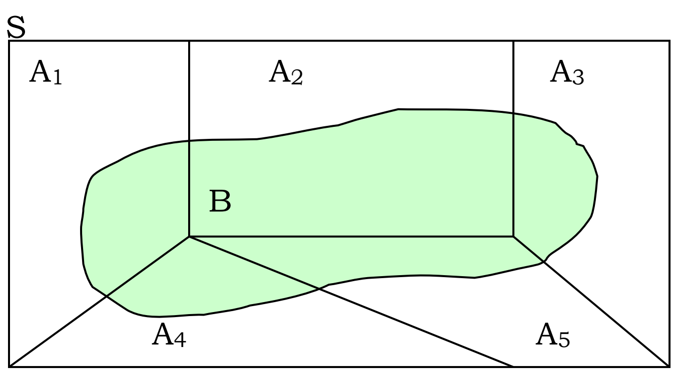
Hay algunos resultados importantes del cálculo de probabilidades (que se conocen como teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades) que son conocidos como teorema de la probabilidad total y Teorema de Bayes.
Para comenzar el estudio de estos teoremas empezaremos por recordar algunas reglas que ya vimos, es decir que de hecho conocemos y que serán necesarias:

- **Regla del suceso complementario** P(A') = 1 - P(A), que también será válida verla para la probabilidad condicional complementaria que vendrá dada por P(A'/B) = 1 - P(A/B).
- **Regla de la Adición:** Sean A y B dos sucesos definidos en un espacio muestral, la probabilidad de su unión, si son sucesos no disjuntos(no mutuamente excluyentes) es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, pero si los sucesos son disjuntos(mutuamente excluyentes) donde $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Regla del Producto:** Sean A y B dos sucesos definidos en S, no mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de su intersección

  es: $P(A \cap B) = \begin{cases} P(A) \, . \, P(B/A) \\ P(B) \, . \, P(A/B) \end{cases}$

  pero si los sucesos son independientes entonces:
  $$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

Una vez recordadas estas reglas podremos considerar que para calcular probabilidad cuando el suceso seguro está descompuesto en una serie de sucesos incompatibles de los que conocemos sus probabilidades tal como se presentan a continuación:



Donde A_1, A_2, ... , A_n son "n" sucesos definidos en S un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, tal como lo verifican las relaciones siguientes:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall\ i \neq j$

Se llega al Teorema de la probabilidad total, que dice:
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ "n" sucesos definidos en S un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces:

$$\forall\ B \subset S \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Demostración:

$$P(B) = P(B \cap S) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P[B \cap A_i] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Veamos un ejemplo:
Se tienen dos urnas que contienen bolas blancas y azules

4 B 3 A	3 B 2 A
Urna 1	Urna 2

¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola blanca?

Urna 1 : $P(U_1) = ½$ $\quad P(B/U_1) = 4/7$
Urna 2 : $P(U_2) = ½$ $\quad P(B/U_2) = 3/5$

Así la $P(B) = P(B/U_1).\ P(U_1) + P(B/U_2).\ P(U_2)$
$= 4/7\ .\ ½ + 3/5\ .\ ½$
$= 4/14 + 3/10$
$= \frac{40+42}{140} = \frac{82}{140} =$

Como la Urna 1 y la Urna 2 forman un sistema incompatible y excluyente de sucesos, el teorema de la probabilidad total permite calcular esta probabilidad, ya que la bola resultado debe provenir de una y solo una de las dos urnas.

Estudiamos este teorema más que nada porque el mismo forma parte del Teorema de Bayes.
El Teorema de Bayes lleva este nombre porque fue enunciado por el reverendo Thomas Bayes (1702 - 1761), además de ministro presbiteriano, era matemático, de nacionalidad Inglesa, el mismo fundamenta la estadística Bayesiana y sienta los principios de la teoría de la decisión sobre la base de la concepción subjetivista de la probabilidad
Se conoce por probabilidad subjetiva, cuando se estudian fenómenos aleatorios en los que no hay posibilidad de repetición o experimentación, la probabilidad subjetiva es la cuantificación (subjetiva) que una persona (o un grupo) hace de un evento utilizando la información que posee.

Este concepto es muy aplicado en la empresa y utilizado por la estadística bayesiana, la teoría de la decisión y de los juegos
Desarrolló un procedimiento formal con el fin de usar la información adicional para revisar las probabilidades.
Este Teorema es bastante útil en el proceso de toma de decisiones ya que regularmente la información adicional se obtiene antes de tomar una decisión importante.

El Teorema de Bayes parte de una probabilidad de procedencia o a priori(*que debe sumar 1, por estar el suceso seguro descompuesto en una serie de sucesos mutuamente excluyentes, de los que se conoce su probabilidad)* y de una probabilidad condicionada a su procedencia.
Por lo que el Teorema de Bayes como tal busca una probabilidad a posteriori.

El Teorema conocido también como la probabilidad inversa, plantea:
Si A_1, A_2, ... , A_n; son "n" sucesos definidos o subconjunto del espacio muestral "S" y conforman un sistema exhaustivo y excluyente y "B" un subconjunto, también del espacio muestral "S", del que conocemos todas las cantidades $P(B/A_i)$, i = 1, 2, ... , n; a la que denominamos verosimilitud, entonces se verifica:

$\forall$ j = 1, 2, ... , n, que

$$P\left(A_j / B\right)=\frac{P\left(A_j\right)P\left(B / A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)P\left(B / A_i\right)}$$

Demostración:
Se puede decir que este Teorema es una consecuencia de la probabilidad condicionada, en términos de la intersección, y del problema de la probabilidad total:

$$P(A_j/B) = \frac{P\left(A_j \cap B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(A_j\right)P\left(B / A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)P\left(B / A_i\right)}$$

Donde $P(A_j/B)$ = probabilidad de que ocurra el suceso A_j dado que ocurrió el suceso B
$P(A_j$ y $B)$ = Probabilidad conjunta de que ocurran los sucesos A y B en sucesión.
P(B) = probabilidad de que haya ocurrido el suceso B

Veamos un ejemplo:
Una empresa compra cierto tipo de pieza que es suministrada por tres proveedores: el 45% de las piezas son compradas al primer proveedor resultando defectuosa el 1%. El segundo proveedor suministra el 30% de las piezas y de ellas es defectuosos el 2%. Las restantes piezas provienen del tercer proveedor, siendo defectuoso el 3 % de las mismas.

En un control de recepción de artículos se selecciona una pieza al azar y es defectuosa. Calcular la probabilidad de que la haya suministrado el segundo proveedor.

Solución:
Cada una de las piezas procede de uno y sólo uno de los proveedores(**sistema exhaustivo y excluyentes de sucesos)** y lo denotaremos por A_1, A_2, y A_3
Sea B el suceso de que la pieza sea defectuosa.

Probabilidad de Procedencia(Probabilidad a Priori, de que la pieza proceda de A_j)
$P(A_1) = 0.45$ $P(A_2) = 0.30$ $P(A_3) = 0.25$

Probabilidad de que la pieza sea Defectuosa(Probabilidad de que la pieza suministrada por A_j sea defectuosa)
$P(B/A_1) = 0.01$ $P(B/A_2) = 0.02$ $P(B/A_3) = 0.03$

¿Qué piden? La probabilidad de que una pieza seleccionada defectuosa sea del 2do proveedor; lo que es una probabilidad a posteriori, que lo resuelve el Teorema de Bayes:

$$P(A_2 / B) = \frac{P(B/A_2)P(A_2)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3)}$$
$$= \frac{0.02\ x\ 0.30}{0.01\ x\ 0.45 + 0.02\ x\ 0.30 + 0.03\ x\ 0.25} = 0.33$$

Vamos a hacer otro ejercicio:
Una Empresa Lechera tiene dos lavadoras de botellas, la "A" procesa un 20% de todas las botellas utilizadas diariamente y rompe un 4% de las que lava. La "B" procesa las restantes y rompe un 2%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella lavada que seleccionaremos al azar este rota?.
b) Una botella que seleccionamos al azar está rota. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido lavada en la máquina "A"?.

Solución:
Antes que todo identificaremos los sucesos
Llamaremos A_1 y A_2 a los sucesos "lavadora de botellas A" y "lavadora de botella B", respectivamente.
Llamaremos suceso B, "botellas que se rompen".

Probabilidad de Procedencia: (probabilidad a priori, de que las botellas procedan de la lavadora A_i)
$P(A_1) = 0.20$ $P(A_2) = 0.80$
Probabilidad de que las botellas se rompan: (probabilidad de que las botellas lavadas por A_i se rompan)
$P(B/A_1) = 0.04$ $P(B/A_2) = 0.02$

a) ¿qué piden? Que una botella lavada este rota, esto es una probabilidad total
   $P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)$
   $= 0.20(0.04) + 0.80(0.02) = 0.024$
b) ¿Qué piden?, Que una botella seleccionada al azar que esta rota, haya sido lavada en la lavadora A(para nosotros es A_1 tal como lo definimos al inicio), esto es una probabilidad a posteriori, luego se resuelve por el teorema de Bayes.

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{0.20\,x\,0.04}{0.20\,x\,0.04 + 0.80\,x\,0.02} = \frac{0.008}{0.024} = 0.3333$$

Distribuciones de probabilidad.

Particular importancia tienen las distribuciones Binomial y Normal, ya que conociendo las características de estas distribuciones el cálculo de probabilidad se hace muy fácil utilizando las tablas que existen para cada distribución. Debe quedar muy claro para ustedes que en el caso de la distribución normal, que es una distribución que corresponde a variable continua, está tabulada la Función de distribución, de ahí la importancia de conocer sus propiedades para el cálculo de probabilidades.

En el caso de las distribuciones Chi-cuadrado y T'Student, el objetivo fundamental está en el manejo de la tabla para el cálculo de probabilidades ya que su aplicación se estudiará en la Estadística. Estas dos distribuciones también son variables aleatorias continuas, por lo que, lo que está tabulada en la tabla es la función de distribución, por lo tanto es válido lo planteado en el párrafo anterior.

VARIABLE ALEATORIA.

Una variable aleatoria "X" es una aplicación definida en un espacio muestral S, que toma valores reales, o sea es la transformación del Espacio Muestral en un conjunto numérico, mediante X.
También se pudiera decir que una variable aleatoria es un fenómeno de interés cuyas respuestas o resultados se pueden expresar numéricamente.

Ejemplo. Experimento: lanzar una moneda dos veces.
Si lo que interesa es conocer la cantidad de caras que pueden aparecer. ¿Cuál será el espacio muestral?
S:[CC EE CE EC]   X: número de caras que aparecen. X= 0, 1, 2

Las variables aleatorias se pueden clasificar en: discreta y continua

DISCRETA: Si toma un conjunto finito o infinito numerables de valores.

CONTINUA: Si toma cualquier valor real de un intervalo.

FUNCION DE PROBABILIDAD. Es la correspondencia que hay entre el valor de la variable y la probabilidad de ocurrencia de cada valor. Se denota por $f(x)$.

Si la función de probabilidad $[f(x)]$ es discreta se le denomina Función de Cuantía. Para que sea una función de probabilidad, la función de cuantía, debe cumplir las siguientes propiedades:

1.- $f(x) \geq 0$ 2.- $\sum_{i=1}^{n} f(x) = 1$

Debemos señalarse que hay autores que la función de cuantía la representan por $p(x)$.

Ahora bien, si la función de probabilidad $[f(x)]$ es continua se le denomina Función de densidad. Para que sea una función de probabilidad, la función de densidad, deben cumplirse las siguientes propiedades:

1.- $f(x) \geq 0$ 2.- $\int_{xo}^{xn} f(x)dx = 1$ 3.- $p\{a < x \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx$ 4.- $P(X = X_k) = 0$

Esta última propiedad nos indica que la probabilidad de un punto no existe por lo tanto se cumplirá, para las variables continuas lo siguiente:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = P\{a \leq x \leq b\} = \{a < x \leq b\} = \{a \leq x < b\} = \{a < x < b\}$$

es decir no se tiene en cuenta si es menor ó igual; ó menor, ya que da lo mismo; ó mayor; ó mayor ó igual.

FUNCION DE DISTRIBUCION.

Existe una función que está íntimamente relacionada con $f(x)$, la cual se denota por $F(x)$ y se denomina Función de Distribución, y se define como:

La probabilidad de que "x" tome valores menores o iguales a un valor determinado (xk). Es decir acumula hasta un valor determinado:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq Xk)}$$

Si la función de distribución corresponde a variable aleatoria discreta:

$$F(x) = \sum_{x < xk}^{xk} f(x)$$

Toda función de distribución de variable aleatoria discreta cumple las siguientes propiedades:

1.- $0 \leq F(x) \leq 1$

2.- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

3.- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

4.- $F(x)$ es una función no decreciente esto es si $x_1 \leq x_2$ implica $F(x_1) \leq F(x_2)$

5.- Si $x_1 < x_2$ entonces: $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Y si la Función de distribución corresponde a variable aleatoria continua:

$$F(x) = \int_{x}^{xk} f(x)dx$$

Toda función de distribución de variable aleatoria continua cumple las siguientes propiedades:

1.- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ 2.- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ 3.- F(x) es una función no esto es si: $x_1 \leq x_2$ entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$	4.- $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ y como $P(X = Xk) = 0$ entonces: $P(x_1 < x \leq x_2) = P(x_1 \leq x \leq x_2) =$ $P(x_1 < x < x_2) = P(x_1 \leq x < x_2)$ 5.- La derivada parcial de F(x) decreciente, respecto a x es igual f (x)

De su definición y sus propiedades se puede concluir que para calcular probabilidad a partir de la función de distribución sería:

$$P(x \leq xk) = F(x)$$
$$P(x > xk) = 1 - F(x)$$
$$P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Las desigualdades de mayor, o mayor igual se tendrán en cuenta si se le aplica a variables discretas. En variables continuas recuerden que no es necesario, ya que no existe la probabilidad de un punto.

Ejemplos:

1.- Un determinado experimento aleatorio tiene como función de probabilidad la relación:

$$f(x) = (1+x)/10 \quad \text{para } x=0, 1, 2, 3$$

Se pide:

a.- Verifique las propiedades de f(x)
b.- P(x >1)
c.- F(1)
d.- Probabilidad de que x tome por lo menos valor 1
e.- Probabilidad de que x tome a lo sumo valor 2
f.- F(3)

Solución:

a.- **Propiedad f (x) ≥ 0**

$f(x_0) = 1/10$; $f(x_1) = 2/10$; $f(x_2) = 3/10$; $f(x_3) = 4/10$; por tanto $f(x) > 0$

Propiedad que la suma de f (x) desde 0 a 3 = 1

$f(x) = 1/10[(1+0)+(1+1)+(1+2)+(1+3)] = 10/10 = 1$

b.- $P(x > 1) = \sum_{x=2}^{3} f(x) = (1+2)/10 + (1+3)/10 = 3/10 + 4/10 = 7/10 = 0.7$

c.- x f (x) F(x)

0	1/10	1/10	F(1) = 3/10 = 0.3 esto nos indica que x es menor ó igual a 1.
1	2/10	3/10	
2	3/10	6/10	
3	4/10	10/10	

Deben fijarse que F(x), se determina y representa lo mismo que Ni, es decir las frecuencias absolutas acumuladas.

d.- $P(x \geq 1) = \sum_{x=1}^{3} f(x) = 1 - f(x=0) = 1 - 1/10 = 9/10 = 0.9$

También se podría hacer, sumando, en vez de por el complemento:

$= 1/10[(1+1) + (1+2) + (1+3)] =$

$= 1/10\ (2 + 3 + 4) = 9/10 = 0.9$

e.- $P(x \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} f(x) = 1 - f(x=3) = 1 - 4/10 = 6/10 = 0.6$

También se podría hacer sumando en vez de por el complemento:

$= 1/10[(1+0) + (1+1) + (1+2)] =$

$= 1/10\ (1 + 2 + 3) = 6/10 = 0.6$

f.- F(3)= 1   Esto indica que x es menor o igual a 3.

2.-Sea $f(x) = 1/18(3 + 2x)$ una función de densidad para $2 < x < 4$

a.- Verifique si se cumplen las propiedades de f (x)

b.- Calcule $P(x < 3)$

c.- $P(x \geq 3)$

d.- $P(x = 3)$

e.- Halle F(x)

f.- Calcule $P(2 < x \leq 3)$ haciendo uso de la F(x)

Solución:

a.- $f(x) = 1/18 \int_2^4 (3+2x)dx = 1/18[\ 3x + 2x^2/2\ ] = 1/18[(12+16) - (6+4)]$

$= 1/18\ (28 - 10) = 18/18 = 1$

b.- $P(x < 3) = 1/18 \int_2^3 (3+2x)dx = 1/18(3x + 2x^2/2] = 1/18[(9+9) - (6+4)]$

$= 1/18\ (18 - 10) = 8/18 = 4/9 = 0.44$

c.- $P(x \geq 3) = 1/18 \int_3^4 (3+2x)dx = 1/18(3x + 2x^2/2] = 1/18[(12+16) - (9+9)]$

$= 1/18(28 - 18) = 10/18 = 5/9 = 0.55$

d.- $P(x=3) = 0$

e.- $F(x) = 1/18 \int_2^{xk} (3+2x)dx = 1/18(3x + 2x^2/2] = [(3x_k + x^2_k) - (6+4)]$

$= 1/18(3x_k + x^2_k - 10)$ por tanto F(x) será

$F(x) = 1/18\ (x^2 + 3x - 10)$

f.- $P(2 < x \leq 3) = F(3) - F(2)$
$= [1/18(9+9-10)] - [1/18(4+6-10)]$
$= 1/18(8 - 0) = 8/18 = 4/9 = 0.44$

CARACTERISTICAS NUMERICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Las características numéricas son medidas que permiten sintetizar la información de forma tal que ofrecen las características generales del fenómeno en estudio, es decir, sus rasgos principales. También se conocen como parámetros de las variables aleatorias.
Las características fundamentales que se estudiarán son: Media y varianza
El valor medio de una Variable aleatoria, se denomina valor esperado ó esperanza matemática se denota por **E (x)**.

El valor esperado de una variable aleatoria se puede considerar como su promedio ponderado sobre todos los resultados posibles siendo las "ponderaciones" la probabilidad relacionada con cada uno de los resultados.

El cálculo del valor esperado está en dependencia si se está trabajando con variables aleatorias discretas o continuas. En el caso de las variables aleatorias discreta, esta medida de resumen se puede obtener multiplicando cada resultado posible de xi por su probabilidad correspondiente P(xi) y después sumando los productos resultantes. Por lo tanto el valor esperado de la variable aleatoria discreta xi se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i f(x)$$

En el caso de las variables aleatorias continuas, esta medida de resumen se obtiene integrando desde x_0 hasta x_n el producto de la variable x por su función de probabilidad. Por lo tanto el valor esperado de la variable aleatoria continua xi se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mu = E(x) = \int_{x0}^{xn} x f(x) dx$$

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

1.- La esperanza de una constante es igual a la propia constante.

$$E(k) = k$$

2.- La esperanza del producto de una constante por una variable es igual a la constante por la esperanza de la variable.

$$E(kx) = k\,E(x)$$

3.- Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables aleatorias entonces:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(x)$$

4.- La esperanza de la suma (o resta) de una constante y una variable es igual a la constante mas la suma (o resta) de la esperanza de x.

$E(k \pm x) = k \pm E(x)$

5.- Si la media poblacional es igual a la esperanza de x, entonces la esperanza de las desviaciones con respecto a la media es igual a cero

Si $\mu = E(x)$ entonces la $E(x - \mu) = 0$

6.- Si x e y son variables aleatorias independientes entonces, la esperanza del producto de "x" e "y" es igual al producto de la esperanza de "x" y de la esperanza de "y".

$E(xy) = E(x)\, E(y)$

7.- La esperanza del producto de la suma de n, variables y constantes es igual a la suma del producto de las "n" constantes por las esperanza de las variables.

$E(C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n) = C_1\, E(x_1) + C_2\, E(x_2) + \ldots + C_n\, E(x_n)$

VARIANZA

La varianza es igual a la esperanza de las desviaciones con respecto a la media, al cuadrado:

$V(x) = E(x - \mu)^2$

También se simboliza por σ^2(sigma al cuadrado, letra griega). Esta definición hace un tanto difícil el cálculo de la varianza, ya que como se dijo anteriormente en el cálculo de la esperanza, la variable, es lo que está dentro del paréntesis, y en este caso lo que está dentro del paréntesis, es $(x - \mu)^2$.

Por lo tanto para el cálculo de la varianza para una variable aleatoria discreta sería $\sum(x - \mu)^2 f(x)$ y en el caso de variables aleatorias continuas sería $\int (x-\mu)^2 f(x)dx$.

Haciendo transformaciones matemáticas se puede llegar a obtener una fórmula de cálculo para la varianza que es mucho más cómoda.

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ en el caso de la variable discreta la:

$E(x^2) = \sum x^2 f(x)$ y en el caso de variables continua **$E(x^2)$**= $\int_{x1}^{xn} x^2 f(x)dx$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA

1.- La varianza de una variable es igual o mayor que cero.

$V(x) \geq 0$

2.- La varianza de una constante es igual a cero.

$V(k) = 0$

3.- La varianza del producto de una constante por una variable es igual a la constante al cuadrado por la varianza de la variable.

$V(kx) = k^2\, V(x)$

4.- La varianza de la suma de una constante más una variable es igual a la varianza de la variable.

$V(k+x) = V(x)$

5.- Si x_1 , x_2 , ...x_n son variables aleatorias independientes, entonces la varianza de la suma de "n" variables es igual a la suma de las varianza de las variables.

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} xi\right) = \sum_{i=1}^{n} V(xi)$$

6.- La varianza de la suma del producto de "n" variables por "n" constantes es igual a la suma del producto de las "n" constantes al cuadrado por las varianzas de las variables.

$$V(C_1\ x_1 + C_2\ x_2 + \ldots + C_n\ x_n) = C^2_1\ V(x_1) + C^2_2\ V(x_2) + \ldots + C^2_n\ V(x_n)$$

Ejercicios.-

Ejemplo 1.- La función de una variable aleatoria x, esta dado por:

x =	1	2	3	4
f(x)=	1/6	1/3	1/6	1/3

Calcular el valor esperado de x y su varianza.

Solución: Primeramente se debe definir si es una variable aleatoria discreta o continua ya que en dependencia del tipo de variable así será su cálculo. En este caso es discreta, se sabe, porque la variable toma valores definidos: 1, 2, 3, y 4

Para ello se debe buscar x f (x) y x^2 f (x)

$x\ f(x) = 1/6\ \ 2/3\ \ 3/6\ \ 4/3$

$x^2\ f(x) = 1/6\ \ 4/3\ \ 9/6\ \ 16/3$

$E(x) = \mu = \sum x\ f(x) = 1/6 + 2/3 + 3/6 + 4/6 = (1+4+3+8)/6 = 16/6$

$= 2{,}66$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \qquad E(x^2) = \sum x^2\ f(x)$

$= 8.33 - 2{,}66^2 \qquad = 1/6 + 4/3 + 9/6 + 16/3$

$= 8.33 - 7.07 \qquad = (1 + 8 + 9 + 32)/6 = 50/6 = 8.33$

$= 1.26$

Ejemplo 2.- Si f (x) = x/2 para 0 < x < 2

a.- ¿Cuál será el valor de la varianza de x?

b.- Hallar **E** (x+3)

c.- Hallar **E** ($2x^2$)

d.- ¿Cuál será el valor de V(2x)?

e.- ¿Cuál es el valor de la desviación típica de x?

Solución: ¿Qué tipo de variable es esta? La forma de presentar el recorrido de la variable x, indica que es una variable continua.

$$\text{a.- } E(x) = 1/2\int_0^2 x\,f(x)dx = 1/2\int_0^2 x^2 dx = 1/2[x^3/3) = 1/2(8/3 - 0)$$

$$= 8/6 = 4/3 = 1.33$$

$$\mathbf{E}\,(x^2) = 1/2\int_0^2 x^2 f(x)dx \;=\; 1/2\int_0^2 x^3 dx = 1/2(x^4/4) = 1/2(16/4) = 16/8 = 2$$

$V(x) = \mathbf{E}\,(x^2) - [\mathbf{E}\,(x)]^2 = 2 - 1.33^2 = 2 - 1.77 = 0.23$

b.- $\mathbf{E}(x+3) = \mathbf{E}\,(x) + 3 = 1.33 + 3 = 4.33$

c.- $\mathbf{E}(2x^2) = 2\,\mathbf{E}(x^2) = 2 \,.\, 2 = 4$

d.- $V(2x) = 2^2\, V(x) = 4\,(0.23) = 0.92$

e.- $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,23} = 0,48$

Recuerde que la desviación típica se representa por la letra griega sigma y que es la raíz cuadrada positiva de la varianza ($V(x) = \sigma^2$)

AUTOEXAMEN

1.- ¿Qué entiende por variable aleatoria?

2.- ¿A que se denomina función de probabilidad?

3.- ¿Cómo se denomina a la función de probabilidad de variable aleatoria discreta y continua y como se denota.

4.- ¿Cómo se define la Función de Distribución?

5.- A partir de la definición de Función de distribución como determinaría las siguientes probabilidades para una variable aleatoria discreta y para una variable aleatoria continua: (utilizando F(x))

a.- $P(x \leq xk)$

b.- $P(x > xk)$

c.- $P(x1 \leq x < x2)$

d.- $P(x1 < x \leq x2)$

e.- $P(x1 < x < x2)$

f.- $P(x1 \leq x \leq x2)$

6.- Se conoce la función de densidad $f(x) = c(4+6x-3x^2)$ para $0 < x < 2$

Calcular:

a.- El valor de C

b.- La función de distribución.

c.- $P(x > 1)$

d.- $P(x < x < 1.5)$

e.- $P(x > 1.9)$

7.-El tiempo en trimestres que transcurre entre dos perturbaciones ciclónicas, se ha podido determinar, que tiene la siguiente función de densidad:

$f(x) = 4/9(x - x^3)$ para $1 < x < 2$ se pide:

a.- Calcule el tiempo esperado que debe transcurrir entre dos ciclones.

b.- De una medida de la desviación típica con que ocurren éstos.

Distribución Binomial. Utilización de tablas estadísticas. Distribución de Poisson. Utilización de tablas estadísticas.

Esto es, los modelos se producen a partir de un riguroso estudio de los más importantes resultados del comportamiento de diferentes procesos aleatorios (experimentos), y para todo aquello que pueda presentarse como analogía a las características que exige dicho modelo, además de que brindan una aplicación simplificada de la realidad.

Se debe señalar que todo modelo contiene:

- Características del experimento: Condiciones que tienen que cumplirse para su aplicación.
- Definición de la variable aleatoria y su recorrido.
- f(x) ….Su función de probabilidad.
- F(x) ….Su función de distribución.(destacando importancia en V.A.C)
- Parámetros (características numéricas) al menos μ y σ^2

Para lograr una identificación con las distribuciones (o modelos) fundamentales en este Tema, los mencionaremos y marcaremos con un asterísco (*) los que estudiaremos.

V.A.Discreta
- Bernoull¡ — Como resumen de los experimentos
- Binomial (*) — estudiados en el Tema 2 Probabilidades
- Hipergeométrica

- Poisson

V.A.Continua
- Exponencial

- Normal (*)
- Chi-Cuadrado (*) — Plataforma para el estudio de la
- T'Student (*) — Inferencia Estadística.

DISTRIBUCION BINOMIAL

La distribución Binomial es una de las distribuciones discretas más utilizadas. Su nombre se debe a la relación que tiene la misma con el desarrollo del binomio:

$$(p+q)^n = C_x^n \ p^x q^{n-x}$$

Esta distribución está relacionada con la distribución de Bernoullí, que es la distribución de la variable aleatoria x, que toma solamente valores cero y uno (fracaso y éxito), cuando se realiza un solo experimento.

Sin embargo existen con frecuencia experimentos de carácter repetitivos en que interesa registrar la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso.
Considérese que "p" es la probabilidad de que el suceso ocurra, esto es, él éxito. Y que "q" es la probabilidad de que el suceso no ocurra, es decir el fracaso y donde q =1- p
Si se realizan "n" repeticiones independientes del experimento en cuestión y se representa por x, el número de éxitos obtenidos en las n repeticiones del experimento entonces se puede decir que la probabilidad de que ocurran "x" éxitos, viene dada por:

$$f(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x} \quad \text{donde } X = 0, 1, \ldots, n$$

Distribución Binomial: Antecedentes: los experimentos son con reposición e independientes(del Tema 2)

1.- Características:

- Que el resultado del experimento se pueda clasificar en una de dos categoría mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustiva conocidas por éxito y fracaso (donde p = probabilidad de éxito y q = probabilidad de fracaso siendo p conocida).
- Qué se realicen "n" pruebas (finitas)
- Que las pruebas sean independientes.
- Que la probabilidad de éxito sea constante de una observación a otra.

2.- Definición de la variable:

X # de veces que ocurren los éxitos en n pruebas.

X = 0, 1, 2, ... , n

3.- Función de Probabilidad: $f(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x}$

4.- Función de Distribución: $F(x) = \sum_{x=0}^{xk} f(x)$

5.- Parámetros:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x) = np \qquad \sigma^2 = V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = npq$$

6.- Representación: X B (n, p)

La distribución BINOMIAL ha sido utilizada en numerosas aplicaciones:
- EN JUEGOS DE AZAR.

¿Qué probabilidad hay que aparezca el color azul al girar 15 veces o más la rueda de una ruleta?.
- EN EL CONTROL DE LA CALIDAD DE UN PRODUCTO.

¿Qué probabilidad hay de que en una muestra de 20 conos de hilo del mismo tipo ninguno está, defectuoso, si el 10% de todos los conos de hilo producido en cierta planta son defectuosos?
- EN LA EDUCACION.

¿Qué probabilidad tiene un estudiante de aprobar un examen de 5 preguntas de opción múltiple (cada una de ellas contiene 4 opciones) si adivina en cada pregunta? (Aprobar se define como lograr correcto el 60% de las preguntas; es decir, acertar por lo menos 3 preguntas)

- EN LAS FINANZAS.

¿Cuál es la probabilidad de que cierta acción mostrar un aumento en su precio al cierre, en una base diaria durante 10 sesiones (consecutivas) de operaciones, si en realidad los cambios de precios en el mercado accionario son aleatorios?.

Fígense que esta distribución queda definida por dos parámetros "n" y "p" y cada vez que se especifican estos parámetros se puede presentar una distribución de probabilidad Binomial particular.

FORMA.

Una distribución binomial puede ser simétrica ó sesgada. Siempre que p = 0.5, la distribución binomial será simétrica, sin tomar en cuenta que tan grande o pequeño sea el valor de “n”. Sin embargo, cuando “p” es diferente de 0.5, la distribución será sesgada. Cuanto más cerca se encuentre “p” de 0.5 y mayor sea el número de observaciones “n”, menos sesgada será la distribución, por otra parte, con una “p” pequeña la distribución tendrá un gran sesgo a la derecha y para una “p” muy grande la distribución tendría un gran sesgo a la izquierda.

Los cálculos de probabilidad a partir de la función, pueden llegar a ser muy tediosos, en especial cuando aumenta “n”, sin embargo se pueden obtener las probabilidades directamente de la tabla Binomial, que está en la Selección de tablas estadísticas y de esta forma evitar cálculos fatigosos. Esta tabla proporciona, para diversas combinaciones de n y p, las probabilidades de que la variable aleatoria binomial tome valores x = 0, 1, 2, ..., n

Sin embargo debe tenerse en cuenta que no están todos y cada uno de los valores de “p” que se necesitan, y hay casos en que sería necesario invertir la probabilidad de éxito por la de fracaso y volver a enunciar la variable y buscar en la tabla los valores equivalentes de x que piden, esto se verá concretamente en un ejercicio.

¿Cómo está estructurada esta tabla?

Tiene en la primera fila los valores de “p”; en la primera columna los valores de “n” y en la segunda columna los valores de x, pero están representados en ella por una k.

		P				
n	k	0.01	0.05	0.15	....	0.50
2	0	0.9801	0.9025	0.7225	....	
	1	0.0198	0.1128	0.2550	....	
	2	0.0001	0.0025	0.0225	....	
3	0	0.9703	0.8574	0.6141	....	
	1	0.0294	0.1354	0.3251	....	

y así sucesivamente.
Si se quiere tener el resultado de la probabilidad se combinan los valores de n y p y dentro de ellos se busca el valor de x que se necesita digamos que se tiene una distribución binomial donde n = 2 y p = 0,15 y quiere obtener la P(x = 1) donde se interceptan estos valores se obtiene la probabilidad, que en este caso es igual a 0.2550.

Ejemplo.
En una industria se está realizando una investigación acerca de la disciplina laboral.
Las estadísticas demuestran que el 5% de los obreros son ausentistas, si se selecciona una muestra aleatoria de 5 trabajadores. Calcule la probabilidad que:
a.- 2 de ellos sean ausentistas.
b.- entre 3 y 5 sea ausentistas.
c.- de que todos asistan.
d.- al menos 4 sean ausentistas

Aquí se puede observar que la distribución binomial se ajusta, ya que:
- el resultado se puede clasificar en éxito y fracaso (ausentistas y no ausentistas respectivamente)
- las pruebas son independientes, es decir que un obrero sea ausentista es independiente de que otro lo sea.
- n es finito, 5 trabajadores ausentistas.
- p es constante, el 5% de los trabajadores son ausentistas.

Por tanto puedo decir que X □B(5, 0.05)

Solución

X: número de obreros ausentistas de 5
a.- P (x = 2) = f(2) = $C_2^5 0.05^2 0.95^3 = 10(0.0025)(0.8574) = 0.0214$
ya que $C_x^n = \frac{n!}{(n-x)!x!} = C_2^5 = \frac{5!}{3!*2!} = \frac{5*4*3!}{2*1*3!} = 10$
Sin embargo esto se resuelve muy fácil utilizando la tabla, buscando para n=5, y para una p=0.05 y dentro de ellos x = 2 donde se interceptan se obtiene este valor encontrado, es decir 0.0214. Luego podemos concluir que únicamente será necesario hacer el cálculo a través de la función de probabilidad cuando no exista en la tabla la probabilidad de éxito que se tiene (p)
b.- P(3 ≤ x ≤ 5) = f(3) + f(4) + f(5)
= 0.011 + 0 + 0
=0.011
c.- P (x=0) = f(0) = 0.7738
d.- P (x ≥ 4) = f (4) + f (5)
= 0 + 0
= 0

También si no se tuviese la tabla habría que sustituir en la función de probabilidad los valores y resolverla.

Ejemplo.

La probabilidad de que un avión de combate regrese de una misión sin sufrir daños es de 0.85 y se envían 4 aviones a una misión, hallar la probabilidad de que:

a.- De 2 a 4 regresen sin sufrir averías.
b.- Al menos 3 regresen sin sufrir daños.
c.- A lo sumo dos regresen sin sufrir daños.
d.- Promedio de aviones sin sufrir daños.
e.- Probabilidad de que todos regresen dañados.

Se aprecia en este ejercicio que cumple las características de una distribución binomial, no obstante llegue Ud. a sus propias conclusiones.

X: número de aviones de combate que regresan sin sufrir daños.

n = 4 y p = 0.85 q = 0.15 . Como en la tabla no está p = 0.85 tendría que usar la función y sustituir los valores en ella para calcular las probabilidades que piden. No obstante existe otra opción para utilizar la tabla y sería nombrar la variable invertida es decir plantear como probabilidad de éxito, lo que tal como dan la información es la de fracaso, que es igual a 0.15, que si está en la tabla. Pero esto a su vez implicaría buscar una equivalencia entre lo que pide el problema y la forma en que está expresada la variable.

Y esto se hace así sencillamente para no hacer el cálculo de la probabilidad a través de la función, que sin lugar a dudas es un tanto fatigoso, y poderlo hacer a través de la tabla.

X: # de aviones de combate que regresan dañados

n = 4 p = 0.15 y q = 0.85 Para BUSCAR la equivalencia entre lo que pide el problema y como se tiene expresada la variable se debe hacer una tabla que ayude a ver claramente lo que se va a calcular.

sin sufrir daños	dañados	
		¿qué regrese 1 avión sin sufrir daño? ¿no es lo mismo que decir que regresen 3 dañados?
		¿qué regresen 3 aviones sin sufrir daño? ¿no
0	4	es lo mismo que decir que regrese 1 avión
1	3	dañado?
2	2	Es decir se busca la equivalencia entre lo que
3	1	pide el problema y la forma en que se tiene
4	0	enunciada la variable

a.- $p(2 \le x \le 4) \equiv p(x \le 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$= 0.5220 + 0.3685 + 0.0975$

$= 0.9880$

b.- $p(x \geq 3) \equiv p(x \leq 1) = f(0) + f(1)$
$= 0.5220 + 0.3685$
$= 0.8905$

c.- $p(x \leq 2) \equiv p(x \geq 2) = f(2) + f(3) + f(4)$
$= 0.0975 + 0.0115 + 0.0005$
$= 0.1095$

d.- $np = 4(0{,}85) = 3.4 = \mu$

$npq = 0.85(0.15)(4) = 0.1275(4) = 0.51 = \sigma^2$

e.- $p(x = 4) = 0.005$ Esta pregunta está realizada tal como está designada la variable, de ahí que no haya que buscar equivalencia. De haber estado formulada la variable como al inicio, habría que haber buscado $p(x=0)$.

AUTOEXAMEN

1.- ¿Cuales son las características de una distribución Binomial?

2.- ¿Qué parámetros define la distribución Binomial?

3.- ¿Qué parámetros define la distribución de Poisson?

4.- ¿Diga cuál es la media y la varianza en la distribución Binomial?

5.- Diga que expresa la variable X en la distribución binomial, y cual es su recorrido.

6.- Sobre la base de la experiencia anterior, la impresora principal del centro de cómputo de cierta universidad funciona adecuadamente el 90% del tiempo. Si se hace una muestra aleatoria de 10 inspecciones:
a.- ¿Cuál es la probabilidad de que la impresora principal funcione en forma apropiada...
a.1.- exactamente nueve veces?
a.2.- por lo menos nueve veces?
a.3.- cuando más 9 veces?
a.4.- más de 9 veces?
a.5.- menos de 9 veces?
b.- ¿Cuantas veces se puede esperar que funcione en forma apropiada la impresora principal?

Ahora se pasará a estudiar las distribuciones correspondientes a variables aleatorias continuas que se imparten en este programa, se comenzará por la distribución Normal.

Distribución Normal. Utilización de tablas estadísticas.
Distribución Ji-Cuadrado y T'student. Utilización de tablas estadística de ambas distribuciones.

DISTRIBUCION NORMAL

Luego de estudiar dos distribuciones de probabilidad discreta se prestará atención a las funciones continuas de densidad de probabilidad, las que se producen por algún proceso de medición en diversos fenómenos de interés.
Los modelos continuos tienen aplicaciones importantes en los negocios y en las ciencias sociales, además de en la Ingeniería y la Física.
Muchas de las técnicas utilizadas en estadística aplicada se basan en la distribución Normal o de Gauss.

1.- CARACTERISTICAS.
- Tiene la forma de una campana boca a bajo.
- Es simétrica con respecto a X = μ
- La función está definida en todo el eje X
- La función tiene un máximo en X = μ = Me = Md
- Tiene dos puntos de inflexión en $\mu + \sigma$ y $\mu - \sigma$
- Su variable aleatoria asociada tiene rango infinito ($-\infty < X < \infty$)

2.- FUNCION DE PROBABILIDAD

$f(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}\ \ e^{-1/2(x-\mu/\sigma)^2}$ donde: e=2.71828 y π=3.14159

3.- FUNCION DE DISTRIBUCIÓN

F(x) = $\int_{-\infty}^{xk} f(x)dx$ La función de distribución tiene una marcada importancia en las distribuciones continuas ya que a partir de sus propiedades es factible calcular fácilmente probabilidad, además de que las tablas estadísticas lo que tiene tabulada es la Función de distribución.

Para calcular $P(X \le Xk) = F(X)$
$P(X > Xk) = 1 - F(X)$
$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ Recuerde que en variables continuas no interesa si es $<$ ó $\le$, ó $>$ ó $\ge$, ya que no existe la probabilidad de un punto.

4.- PARAMETROS. La media en esta distribución es μ y la varianza es σ^2 por lo que la misma queda definida por estos dos parámetros ya que "e" y "π" son constantes matemáticas.

5.- REPRESENTACION
X N(μ, σ)

Por lo tanto habrá tantas curvas normales, como valores o combinaciones particulares de μ, y σ haya.

Como es una variable continua para calcular probabilidad se tendría que integrar la función de X, en el intervalo que se quiere hallar la probabilidad.
¿Cómo se podría hacer una tabla, para no tener que integral?
La única forma de hacer una tabla para evitar este cálculo sería estandarizando la variable, es decir cualquier variable aleatoria normal X, se convierte en una variable aleatoria estandarizada "Z" que siempre tendría como media cero y desviación típica 1; y así se tendría la posibilidad de tabular los resultados.

Pues bien $Z \rightarrow N(0,1)$ y su función de probabilidad es: $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{1}{2}z^2}$

donde: $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$
Toda distribución normal con media μ y desviación típica σ tiene la característica de tener el área bajo la curva de su función de densidad, distribuida de la siguiente forma:
a.- $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)$ = 68.27% del área bajo la curva normal
b.- $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma)$ = 95.45% " " " " " "
c.- $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma)$ = 99.73% " " " " " "

A estas tres expresiones se les llaman comúnmente propiedades de las 3sigmas, las cuales representan áreas bajo la curva de la función de la distribución normal.

ESTRUCTURA Y MANEJO DE LA TABLA:
Su estructura es la siguiente: En la primera columna tienen los valores de Z, hasta la aproximación de la décima y en la primera fila la aproximación de la centésima. En la hoja #15 están tabulados los valores de Z negativos, y en la hoja #16 los valores de Z positivos. Como se dijo anteriormente en esta tabla están registrados los valores de la función de distribución, por tanto son valores acumulados, es decir acumula desde menos infinito(-∞) hasta el valor de Z que se busca, de ahí la importancia de aplicar las propiedades de la función de distribución planteadas anteriormente para buscar las probabilidades. En el cuerpo de la tabla están las probabilidades correspondientes.
Los valores de Z negativos, corresponden a la cola izquierda, y los valores de Z positivos corresponden a la cola derecha, tenga en cuenta que Z puede tomar valores negativos ó positivos **¡PERO LA PROBABILIDAD SIEMPRE ES POSITIVA!**

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-3	.0013	.0010	.0007	...					.0000
-2.9	.0019	.0018	.0017	...					.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	...					.0019

Así para una $Z = -2.82$ la probabilidad acumulada hasta ese valor es .0024 es decir desde menos infinito hasta donde está ubicado $Z=-2.82$

EJERCICIOS:

En una distribución normal con $\mu = 23$ y $\sigma^2 = 25$, hallar:

a.- $P(X < 23,5)$ e.- $P(25 < X < 30)$

b.- $P(X > 10)$ f.- $P(X < 20)$

c.- $P(X >23)$ g.- $P(X < 25)$

d.- $P(8 < X < 21)$ Se le recomienda al estudiante hacer el gráfico de lo que le piden en cada caso.

Solución: TENGA EN CUENTA QUE LE DAN EL VALOR DE LA VARIANZA, Y UD DEBE TRABAJAR CON LA DESVIACION TIPICA (RAIZ CUADRADA DE LA VARIANZA).

a.- $P(X < 23,5) = P(Z < (23,5 - 23)/5) = P(Z < 0,5/5) = P(Z < 0,1) =$
$= Fz(0,1) = 0,5398$

b.- $P(X > 10) = 1 - P(X < 10)= 1 - P(Z < (10-23)/5)= 1 - P(Z < -13/5)$
$= 1 - P(Z < -2,6) = 1 - Fz(-2.6) = 1 - 0.0047 = 0.9953$

c.- $P(X > 23) = 0.50$ Esto no hay ni que buscarlo en la tabla porque el área bajo la curva es 1 por tanto de la mitad al final de la distribución será la mitad, (0.50) pero además, en este punto "Z" es igual a cero, y buscando $Z=0$ daría también $Fz(0) = 0.50$

d.- $P(8 < X < 21) = P[(8-23)/5 < Z < (21-23)/5]= P(-15/5 < Z < -2/5)=$
$= P(-3 < Z < -0.4)= Fz(-0.4) - Fz(-3) =$
$= 0.3446 - 0.0013 = 0.3433$

e.- $P(25 < X < 30) = P[(25-23)/5 < Z < (30-23)/5]= P(2/5 < Z < 7/5)=$
$= P(0.4 < Z < 1.4) = Fz(1.4) - Fz(o.4) =$
$= 0.9192 - 0.6554 = 0.2638$

f.- $P(X < 20) = P(Z < (20-23)/5) = P(Z < -3/5) = P(Z < -0.6) =$
$= Fz(-0.6) = 0.2743$

g.- $P(X < 25) = P(Z < (25-23)/5) = P(Z < 2/5) = P(Z < 0.4) =$
$= Fz(0.4) = 0.6554$

La Empresa de Jabonería y perfumería tiene una máquina para llenar cajas de polvo facial. En un informe del departamento de control estadístico, se plantea que la variable, llenar cajas con polvo facial, está distribuida normalmente con media igual a 15 onzas y desviación típica (ó
Estándar) igual a 0.8.

a.- ¿Qué proporción de las cajas tendrá pesos netos mayores que 14 onzas?

b.- ¿Qué proporción de las cajas tendrá pesos netos entre 13 y 14 onzas?.

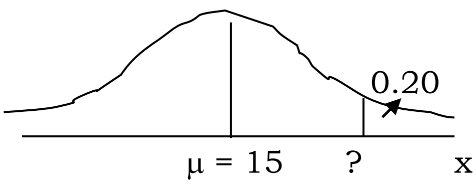
c.- ¿Cuál es el peso mínimo del 20% de las cajas más pesadas?.

Solución: En este caso a pesar de que el cálculo de la distribución normal está enmarcada en el contexto de una situación concreta, se hace igual al ejercicio anterior, según sea el caso, excepto el último inciso que como se verá no pide probabilidad, si no el número, esto se explicará en el propio inciso. Se debe significar también qué cuando le piden proporción sólo multiplican por 100 la probabilidad y así obtienen dicha proporción.

a.- $P(X > 14) = 1 - P(X < 14) = 1 - P(Z < (14\text{-}15)/0.8) =$
$= 1 - P(Z < -1/0.8) = 1 - P(Z < -1.25) =$
$= 1 - Fz(-1.25) = 1 - 0.1056 = 0.8944$ el 89.4% de las cajas tendrá pesos netos mayores de 14 onzas.

b.- $P(13 < X < 14) = P[(13\text{-}15)/0.8 < Z < (14\text{-}15)/0.8] =$
$= P(-2/0.8 < Z < -1/0.8) = P(-2.5 < Z < -1.25) =$
$= Fz(-1.25) - Fz(-2.50) =$
$= 0.1056 - 0.0062 = 0.0994$ el 9.94% ó el 10% de las cajas tendrán pesos netos entre 13 y 15 onzas.

c.- En este inciso, piden el peso mínimo del 20% de las cajas más pesadas. ¿Dónde están las cajas más pesadas? ¿En la parte izquierda o derecha de la curva? por supuesto que en la parte derecha de la curva, dibuje o sombree esa punta:



Como $Z = (x - \mu)/\sigma$ y lo que interesa es "x" se puede buscar despejando ya que se tiene el valor de μ y σ; y teniendo el área (0.20), se puede obtener Z en la tabla.

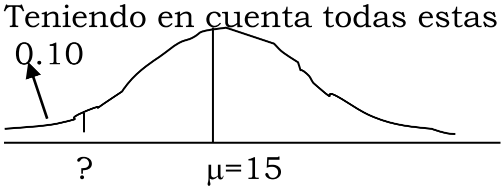
" Se dirá el área que se busca está en la cola derecha, entonces el signo que lleva Z, es positivo" pero ¿de donde se obtendría el valor de Z?. Del cuerpo de la tabla, ¿por qué? Porque si se tiene un área qué es el 20% eso es equivalente a una probabilidad igual a 0.20, por tanto se buscaría en el cuerpo de la tabla (no en la primera columna) una probabilidad igual o muy próxima a 0.20 y se toma la Z que le corresponde, considerando hasta la aproximación a la centésima, PERO SIN TOMAR EL SIGNO QUE TENGA "Z" EN LA TABLA, ya que si el área que se busca está en la cola derecha, como se dijo anteriormente, Z llevará el signo positivo y si está en la cola izquierda llevará el signo negativo, esto es muy importante para llevar a cabo bien el cálculo de "x". En este caso el valor que más se aproxima a 0.20 en el cuerpo de la tabla es la Z = -0.8, columna 4, por tanto es -0.84, pero, ¿porque digo que esto es una probabilidad de 0.20?, Porque debemos de recordar que esta es una distribución simétrica y nos da el área acumulada. Luego ya se tienen todos los elementos para sustituir en la formula; en este caso se está trabajando con la cola derecha por lo tanto la Z es positiva(0.84). Sustituimos:

$$Z\sigma + \mu = x$$
$$0.84\,(0.8) + 15 = X$$
$$0.672 + 15 = X$$
$$15.67 = X$$

Fíjense que cuando el área que se busca está a la derecha, evidentemente el valor de X que se busca debe ser mayor que μ, mientras que si es el izquierdo debe ser menor que μ

Se podría hacer otro inciso de este mismo corte:
¿Cuál será el peso máximo del 10% de las cajas menos pesadas?

¿Dónde se encontrarían las cajas menos pesadas? ¿A la izquierda ó a la derecha? Una vez ubicado ¿El valor de Z será negativo ó positivo? ¿El valor de X será mayor ó menor que 15?
Teniendo en cuenta todas estas interrogantes trata de resolver este inciso.



DISTRIBUCION T'STUDENT Y CHI-CUADRADO

El estudio de estas dos distribuciones se circunscribe al manejo de las tablas, ya que su aplicación se verá en la Estadística

DISTRIBUCIÓN T'STUDENT.

Es una distribución continua de considerable importancia práctica, muy utilizada en la teoría de muestras pequeñas, con la que se trabajará en el campo de la inferencia.

La distribución t'student es la distribución de la variable:

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$$

donde ν es la letra griega nu, que es un entero positivo, conocida por grados de libertad. Las variables "X" y "Y" son variables aleatorias independientes, donde "X" está normalmente distribuida con media cero y desviación típica uno, y "Y" sigue una distribución Ji'Cuadrado con nú grados de libertad.

Siendo su función de probabilidad:

$$f(t) = \frac{K_\nu}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}$$ K_ν constante que depende de ν

En esta distribución $\mu = 0$ para $\nu = 2, 3$; $\sigma^2 = \nu/(\nu - 2)$ para $\nu=3, 4$
Cuando ν(nu) crece la variable t tiende a la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es decir coincide con la normal estandarizada.

Esta distribución es simétrica, como la normal, pero es un poco más achatada que ella.
Está tabulada la función de distribución, como ustedes saben que acumula desde $-\infty$ hasta un punto, en este caso la tabla de t'student que está en la selección de tabla estadística está tabulada desde menos infinito hasta la mitad positiva de t. Aquí pasa lo mismo que en la distribución normal que como $\mu = 0$ los valores de t a la izquierda son negativos y a la derecha son positivos, PERO LA PROBABILIDAD SIEMPRE ES POSITIVA.

La estructura de esta tabla es la siguiente: Tabla limitada para algunos valores de ν(nu), no es posible el total de valores, que están ubicados en la primera columna. NOVEDAD: el área se encuentra en la primera fila (las probabilidades), y en el cuerpo de la tabla los valores de "t".

La razón apuntada anteriormente, de que está tabulada la función de distribución, pero sólo los valores positivos de "t", lleva a tener que hacer algunas transformaciones cuando aparece un percentil con signo negativo, es decir si se tiene que buscar un área que corresponde a la cola izquierda, evidentemente el valor de "t" es negativo, en ese caso, se le cambia el sentido del signo de la desigualdad, lo que está apoyado en la simetría de la distribución. De la misma forma si se trabaja con las propiedades de la función de distribución y se tiene el caso de una Ft evaluada para algún valor de "t" negativo, como en principio cambia la desigualdad, entonces será [1 - Ft (con el valor correspondiente positivo)].

Ejemplo:

Se tiene una Variable aleatoria "x", con distribución t'student, resuelva las siguiente proposiciones:

a.- Represente gráficamente y calcule $P(t(17) > -0.392)$

b.- Halle $P(t(17) < 0.863)$

c.- Resuelva $P(-1.07 < t(17) < 2.9)$

d.- Diga el valor de $P(t(17) < - 0.534)$

e.- Calcule $P(-1.74 < t(17) < -0.257)$

f.- Halle tk las que $P(t(17) < tk) = 0.75$

g.- Halle entre que valores t_1 y t_2 se encuentra una probabilidad central del 0.70 si t(17).

Solución:

a.- $P(t(17) > -0.392) = P(t(17) < 0.392)$

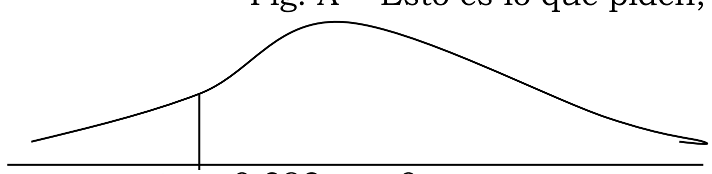
$= Ft\ (0.392) = 0.65$

Se busca en 17 grados de libertad un valor igual o próximo a 0.392 y el valor que le corresponde ubicado en la primera fila es la probabilidad buscada.

Y así se procede en todos los casos.

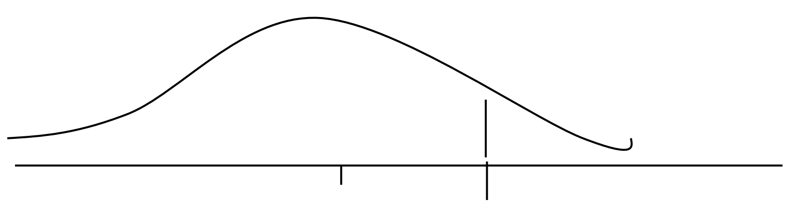
Gráficamente se puede observar según figura A y B:

Fig. A Esto es lo que piden, el área sombreada



t = -0.392 μ = 0

Sin embargo la fig. B muestra lo que calcula la tabla, el área sombreada en la cola izquierda.



μ = 0 t = 0.392

Fig. B

Esto es, la tabla calcula desde $-\infty$ hasta el área positiva, gracias a la simetría de la distribución, el área sombreada en cada figura son iguales por tanto se obtiene de esta forma la probabilidad buscada.

b.- $P(t(17) < 0.863) = Ft(0.863) = 0.80$ POR DEFINICION DE Fx

c.- $P(-1.07 < t(17) < 2.9) = Ft(2.9) - Ft(-1.07)$ por propiedad de Fx

$= Ft(2.9) - [1 - Ft(1.07)]$ por ser "t" negativa

$= 0.995 - (1 - 0.85)$

$= 0.995 - 0.15$

$= 0.845$

d.- $P(t(17) < -0.534) = P(t(17) > 0.534)$

$= 1 - Ft(0.534)$ por propiedad de Fx

$= 1 - 0.70$

$= 0.30$

e.- $P(-1.74 < t(17) < -0.257) = Ft(-0.257) - Ft(-1.74)$ por propiedad de Fx

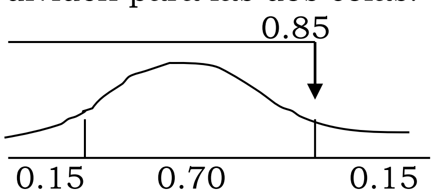
$=[1 - Ft(0.257)] - [1 - Ft(1.74)]$ por estar las dos "t" negativas $= (1 - 0.60) - (1 - 0.95)=$

$= 0.40 - 0.05$

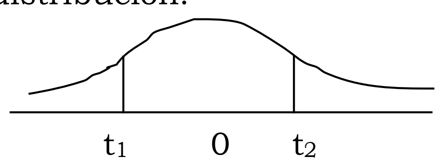
$= 0.35$

f.- $P(t(17) < tk) = 0.75$ ====> $tk = 0.689$

g.- $P(t1 < t(17) < t2) = 0.7$ para buscar estos dos valores, se grafica la distribución, se dibuja un área central igual a 0.70 y los 0.30 restantes se dividen para las dos colas:



Buscando esta área se obtiene el valor de "t" positivo en la tabla (es decir de t_2) y el valor de t_1 es el mismo con signo negativo, debido a la simetría de la distribución.



De esta parte pueden hacer los ejercicios 368 a 376, que están en la pagina 249 a 253.

DISTRIBUCION JI-CUADRADO

Esta distribución fue introducida por Helmert en 1876.

Si X1, X2, ... Xv, son variables aleatorias normalmente distribuidas e independientes con media cero y varianza 1, la suma de sus cuadrados, se representan en general por χ^2 (Ji-Cuadrado ó Chi-cuadrado) y donde :

$$\chi^2 = X^2{}_1 + X^2{}_2 + \ldots + X^2{}_v$$

A la distribución, se le llama distribución de Ji-cuadrado, siendo su función de densidad:

$$f(x) = K_\nu \chi^{(\nu-2)/2}\, e^{-x/2} \qquad \text{cuando} \quad x > 0$$

$$\text{y} \quad f(x) = 0 \qquad \text{cuando} \quad x \leq 0$$

En esta función ν (nu), es un entero positivo, que se le llama grado de libertad de la distribución y Kν es una constante que depende de ν

Para ν > 2 la curva de f(x) tiene un máximo en x = (ν - 2)

La distribución χ^2 tiene como μ = ν y $\sigma^2 = 2\nu$

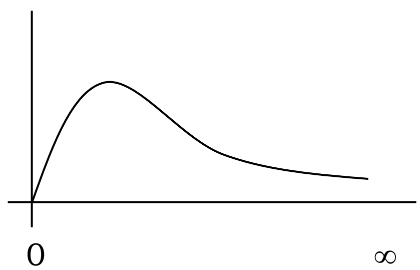
Cuando ν(nu) es grande (ν > 30) la distribución χ^2 se puede aproximar a la distribución normal. Observe que esta distribución depende de un sólo parámetro ν(nu).

La función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \int_0^{xk} f(x)dx$$

Y está tabulada para distintos valores de los grados de libertad (el número de variables independientes que intervienen en una expresión dada)

Es una distribución deformada a la derecha:



Estructura de la tabla: Tabla limitada para algunos valores de ν(nu), no es posible el total en el recorrido 0 < x < ∞

Novedad: El área o probabilidad se encuentra en la primera fila y en la primera columna los grados de libertad, y en el cuerpo de la tabla están los valores de ji-cuadrado.

Como lo que está tabulada en la función de distribución, la misma proporciona el área desde cero hasta un punto.

EJEMPLO:

Se conoce que una variable en estudio tiene una distribución χ^2, resuelva las siguientes proposiciones:

a.- Calcule P (χ^2(17) >10.1) y represente el área en un gráfico.

b.- Halle P(5.7 < χ^2(17) < 21.6)

c.- Diga el valor de P(χ^2(17) < 27.6)

d.- Hallar Xk si P(χ^2(17) > χ^2_k) = 0.8

e.- Calcule la P(7.56 < χ^2(17) < 16.3)

f.- Hallar los g.l. que satisfacen P(χ^2 > 8.9) = 0.99

g.- De la lectura de los valores en la tabla de F(x) diga que valores χ^2_1 y χ^2_2 alrededor de χ^2(21) = 20.3 forman probabilidades de áreas centrales.

Solución:

a.- P($\chi^2$17) > 10.1) = 1 - P(χ^2(17) < 10.1)

$= 1 - F\chi^2(10.1)$ se busca en la tabla a partir de $\nu = 17$
$= 1 - 0.10$ el valor en esa línea = 10.1 y el valor
$= 0.90$ que le corresponde en la primera fila

es la probabilidad buscada, resultando en este caso igual a 0.10. Y así se procede en todos los casos. Esta tabla es similar a la de t'student en la forma de proceder para obtener la probabilidad.
(Aquí en este inciso se aplicó una de las propiedades de la F(x).

b.- $P(5.7 < \chi^2(17) < 21.6) = F\chi^2(21.6) - F\chi^2(5.7)$ por propiedad de Fx
$= 0.80 - 0.005 = 0.755$

c.- $P(\chi^2(17) < 27.6) = F\chi^2(27.6) = 0.95$ por definición de F(x)

d.- $P(\chi^2(17) > Xk) = 0.8 ===> P(\chi^2(17) < Xk) = 0.20$ por tanto Xk = 12

e.- $P(7.56 < \chi^2(17) < 16.3) = F\chi^2(16.3) - F\chi^2(7.56)$
$= 0.50 - 0.025 = 0.475$ por propiedad de Fx

f.- $P(\chi^2 > 8.9) = 0.99 ===> P(\chi^2 < 8.9) = 0.01$ por tanto $\nu = 21$ esto se obtiene recorriendo los valores de $\chi^2_{0.01}$ y donde esté 8.9 ó un valor próximo a él, y se busca el grado de libertad que le corresponde a este valor.

g.- Puntos χ^2_1 y χ^2_2 simétricos que forman un área central con $\chi^2_{21} = 20.3$ son:

χ^2_1	χ^2_2	Probabilidad		área
17.2	23.9	0.30	0.70	0.40
15.4	26.2	0.20	0.80	0.60
13.2	29.6	0.10	0.90	0.80
11.6	32.7	0.05	0.95	0.90
10.3	35.5	0.025	0.975	0.95
8.9	38.9	0.01	0.99	0.98
8.03	31.4	0.005	0.995	0.99

AUTOEVALUACION

1.- ¿Cuáles son las características de la distribución normal

2.- ¿Qué parámetros la definen?

3.- ¿Qué distribución tiene Z, y cuáles son su media y varianza?

4.- ¿A qué tipo de variable corresponden estos tres modelos: Normal, T'Student y Ji-Cuadrado?

5.- El análisis estadístico de 1000 llamadas telefónicas de larga distancia realizadas desde las oficinas centrales de la Corporación Cimex, señala que la duración de estas llamadas está distribuida normalmente con $\mu = 240$ segundos y desviación típica igual a 40 segundos.
a.- ¿Qué porcentaje de llamadas duró menos de 180 segundos?

b.- ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada en particular durara entre 180 y 300 segundos?
c.- ¿Cuantas llamadas duraron menos de 180 segundos ó más de 300 segundos?
d.- ¿Qué porcentaje de las llamadas duró entre 110 y 180 segundos?
e.- ¿Cuál es la duración mínima del 1% de las llamadas más largas?

6.- Determine el valor de Xo en cada uno de los siguientes casos:
a.- $P(Xo < X < 26,2) = 0.98$ conociendo que X sigue χ^2_{12}
b.- $P(Xo < X < 2,76) = 0.98$ conociendo que X sigue t (10)

7.- Calcule cada uno de los valores siguientes:

Con 15 grados de libertad:
a.- $t_{0.90}$ b.- $t_{0.10}$ c.-$t_{0.95}$ d.-$t_{0.05}$ e.-$t_{0.975}$ f.-$t_{0.025}$
g.- $t_{0.99}$ h.- $t_{0.01}$ i.-$t_{0.995}$ j.-$t_{0.005}$

Con 25 grados de libertad:
a.- $\chi^2_{0.90}$ b.- $\chi^2_{0.10}$ c.- $\chi^2_{0.95}$ d.- $\chi^2_{0.05}$ e.- $\chi^2_{0.99}$ f.- $\chi^2_{0.01}$
g.- $\chi^2_{0.975}$ h.- $\chi^2_{0.025}$ i.- $\chi^2_{0.995}$ j.- $\chi^2_{0.80}$

Luis Lluglla Luna Msc.
UNIVERSIDAD ESTATAL AMAZONICA
PROFESOR ADJUNTO
2007.
luislluglla@uea.edu.ec
luislluglla@yahoo.com.